

Table des matières

1 Exemples du cours	2
2 Exercices du manuel	3
33 page 103	3
61 page 105	3
115 page 115	5
3 Autres exercices	7
Rappels - Exercice 1	7
Rappels - Exercice 2	7
Rappels - Exercice 3	7
Rappels - Exercice 4	7
Rappels - Exercice 5	7
Rappels - Exercice 6	7

1 Exemples du cours

2 Exercices du manuel

33 page 103

$\vec{n} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{L}$.

Si le plan cherché est parallèle au plan $\mathcal{L}$, alors il admet également $\vec{n} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Une équation du plan cherché est donc de la forme :

$$\sqrt{6}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + d = 0$$

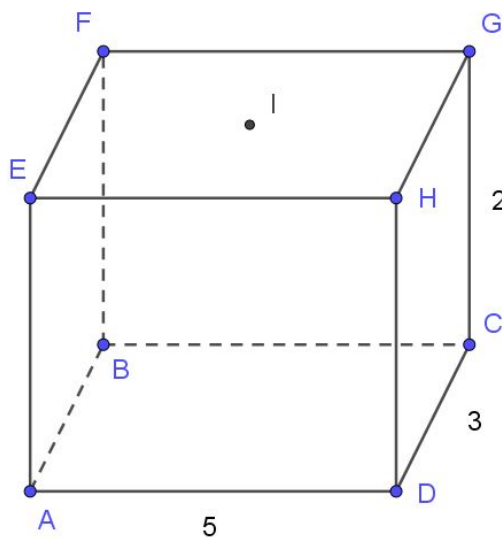
Comme le point G appartient à ce plan, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \times x_G + \sqrt{3} \times y_G - \sqrt{3} \times z_G + d &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{6} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times 1 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

. En conclusion, le plan cherché admet pour équation

$$\boxed{\sqrt{6}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z - 3 - \sqrt{3} = 0}$$

61 page 105



1. Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 3^2 + 5^2 && \text{car } ABCDEFGH \text{ est un pavé droit} \\ AC^2 &= 34 \end{aligned}$$

Comme AC est une longueur, on en déduit que $\boxed{AC = \sqrt{34}}$.

2. ■ Comme les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ ont les mêmes mesures, on en déduit que $AC = EG$.

De plus, comme I est le milieu de $[EG]$, on a $GI = \frac{AC}{2}$, d'où $\boxed{GI = \frac{\sqrt{34}}{2}}$.

- Le triangle IAE est rectangle en E donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IA^2 = IE^2 + EA^2$$

$$IA^2 = \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 + 2^2 \quad \text{car } IE = GI$$

$$IA^2 = \frac{25}{2}$$

Comme IA est une longueur, on en déduit que $IA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

- Le triangle GAE est rectangle en E donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$GA^2 = GE^2 + EA^2$$

$$GA^2 = (\sqrt{34})^2 + 2^2$$

$$GA^2 = 38$$

Comme GA est une longueur, on en déduit que $GA = \sqrt{38}$.

3. Pour déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AGI}$, on va calculer $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI}$ de deux manières différentes.

Comme il est toujours utile d'avoir plusieurs méthodes à notre disposition, on va ici proposer 4 méthodes pour calculer ce produit scalaire.

Méthode 1 : Avec les coordonnées

On se place dans le repère $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ qui est **orthonormé**.



Si le repère n'est pas orthonormé, on ne peut pas utiliser cette méthode.
C'est une erreur classique à éviter !

Dans ce repère, on a :

$$A(0; 0; 0)$$

$$G(5; 3; 2)$$

$$I\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 0-5 \\ 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GI} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-5 \\ \frac{3}{2}-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{GI} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = -5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \times 0 = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{17}$$

Méthode 2 : Avec le projeté orthogonal

Le projeté orthogonal de A sur la droite (GI) est le point E . Ainsi, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GI}$.

De plus, les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ ont le même sens donc :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GI} = GE \times GI = \sqrt{34} \times \frac{\sqrt{34}}{2} = \boxed{17}$$

Méthode 3 : Avec une formule de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Dans notre cas, cela donne :

$$\begin{aligned}\vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GI}\|^2 - \|\vec{GA} - \vec{GI}\|^2 \right) \\ \vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GI}\|^2 - \|\vec{GA} + \vec{IG}\|^2 \right) \\ \vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GI}\|^2 - \|\vec{IA}\|^2 \right) \\ \vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{38})^2 + \left(\frac{\sqrt{34}}{2} \right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) \\ \vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{38})^2 + \left(\frac{\sqrt{34}}{2} \right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) \\ \vec{GA} \cdot \vec{GI} &= \boxed{17}\end{aligned}$$

Méthode 4 : Avec la formule avec le cosinus (indispensable ici pour faire apparaître l'angle)

De plus,

$$\vec{GA} \cdot \vec{GI} = GA \times GI \times \cos(\widehat{AGI})$$

On obtient alors

$$\cos(\widehat{AGI}) = \frac{17}{\sqrt{38} \times \frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{\sqrt{323}}{19}$$

On obtient grâce à la calculatrice que $\widehat{AGI} \approx 19 \text{ degrés}$.

115 page 115

1. (a) On a $\vec{OA} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10 \times 1 + 0 \times 7 + 1 \times 1 = 11 \neq 0$$

Les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ne sont pas orthogonaux donc $\boxed{\text{les droites } (OA) \text{ et } (OB) \text{ ne sont pas perpendiculaires}}$.

(b) On a

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\widehat{AOB})$$

Or $\|\vec{OA}\| = \sqrt{101}$ et $\|\vec{OB}\| = \sqrt{51}$ d'où

$$11 = \sqrt{101} \times \sqrt{51} \times \cos(\widehat{AOB}) \iff \cos(\widehat{AOB}) = \frac{11}{\sqrt{101} \times \sqrt{51}}$$

On en déduit finalement que $\boxed{\widehat{AOB} \approx 81,2^\circ}$.

2. On a :

- $7x_O + 9y_O - 70z_O = 7 \times 0 + 9 \times 0 - 70 \times 0 = 0.$
- $7x_A + 9y_A - 70z_A = 7 \times 10 + 9 \times 0 - 70 \times 1 = 0.$
- $7x_B + 9y_B - 70z_B = 7 \times 1 + 9 \times 7 - 70 \times 1 = 0.$

Les coordonnées des points O , A et B vérifient bien l'équation de ce plan. Comme ces trois points ne sont pas alignés, on peut en déduire que $\boxed{7x + 9y - 70z = 0 \text{ est bien une équation cartésienne du plan } (OAB)}$.

3. $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (CA) et $C(0; 0; 5) \in (CA)$.

Par conséquent, une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = -4t + 5 \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

4. D est le milieu du segment $[OC]$ donc D a pour coordonnées $(0; 0; \frac{5}{2})$.

Comme le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (AOB) , une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme

$$7x + 9y - 70z + d = 0$$

Or, $D \in \mathcal{P}$ donc :

$$7x_D + 9y_D - 70z_D + d = 0 \iff d = 175$$

Finalement, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $7x + 9y - 70z + 175 = 0$.

5. $F \in \mathcal{P} \cap (CA)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_F = 10t \\ y_F = 0 \\ z_F = -4t + 5 \\ 7x_F + 9y_F - 70z_F + 175 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = 10t \\ y_F = 0 \\ z_F = -4t + 5 \\ 7 \times 10t + 9 \times 0 - 70 \times (-4t + 5) + 175 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = 10t \\ y_F = 0 \\ z_F = -4t + 5 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On trouve alors que le point F a pour coordonnées $F(5; 0; 3)$.

6. On a $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{0} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{EF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

3 Autres exercices

Rappels - Exercice 1

Méthode 1 : Avec la formule avec le cosinus

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Rappels - Exercice 2

Méthode 2 : Avec le projeté orthogonal (peu utilisée)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = c^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} &= -AD \times CB = -c^2\end{aligned}$$

Rappels - Exercice 3

Méthode 3 : Avec une formule de polarisation (peu utilisée)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{CG}\|^2 + \|\overrightarrow{CF}\|^2 - \|\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CF}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{CG}\|^2 + \|\overrightarrow{CF}\|^2 - \|\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{CG}\|^2 + \|\overrightarrow{CF}\|^2 - \|\overrightarrow{FG}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) \\ &= 38\end{aligned}$$

Rappels - Exercice 4

Méthode 4 : Avec les coordonnées



Si le repère n'est pas orthonormé, on ne peut pas utiliser cette méthode.

C'est une erreur classique à éviter même si le repère est très souvent orthonormé dans les exercices.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) - 4 \times 7 = -43$$

Rappels - Exercice 5

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-5) \\ -1 - (-2) \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 6 - (-1) \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \times (-1) + 1 \times 7 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et donc que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Rappels - Exercice 6

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI} && \text{double distributivité}\end{aligned}$$

Tout d'abord, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$ car $ABCD$ est un carré.

De plus, comme les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens, on a :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = AD \times AI$$

Enfin, comme les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires mais de sens opposés, on a :

$$\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BC} = -DJ \times BC$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 + AD \times AI - DJ \times BA + 0$$

Comme I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[DC]$, on a $AD \times AI = DJ \times BA$ donc $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$.
En conclusion, les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.



On aurait aussi pu contourner l'indication de l'exercice, poser le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et utiliser la méthode avec les coordonnées mais vous auriez perdu quelques points car l'énoncé vous « forçait » à utiliser une autre méthode.