

Table des matières

1 Exemples du cours	2
Exemple 6	2
2 Exercices du manuel	5
A page 238	5
22 page 250	6
27 page 250	6
60 page 252	6
62 page 252	7
66 page 252	7
138 page 262	7
3 Autres exercices	9

1 Exemples du cours

Exemple 6

1.

$$A = \ln(10000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$$

$$A = \ln(10^4) - \ln(10^{-1}) + \ln(10^{-2})$$

$$A = 4 \ln(10) - (-1) \ln(10) + (-2) \ln(10)$$

$$A = 3 \ln(10)$$

$$B = \ln(32) - 7 \ln(2) - 4 \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$B = \ln(2^5) - 7 \ln(2) - 4 \ln(2^{-3})$$

$$B = 5 \ln(2) - 7 \ln(2) - 4 \times (-3) \ln(2)$$

$$B = 10 \ln(2)$$

$$C = 8 \ln(\sqrt{3}) + 5 \ln(9) - \ln(9\sqrt{3})$$

$$C = 8 \ln(3^{\frac{1}{2}}) + 5 \ln(3^2) - \ln(3^{\frac{5}{2}})$$

$$C = \frac{1}{2} \times 8 \ln(3) + 2 \times 5 \ln(3) - \frac{5}{2} \ln(3)$$

$$C = \frac{23}{2} \ln(3)$$

$$D = \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$D = \ln((\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}))$$

$$D = \ln(3 - 2)$$

$$D = 0$$

$$E = 2 \ln(\sqrt{8}) - 3 \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E = 2 \ln(2^{\frac{3}{2}}) - 3 \ln(2^{-2})$$

$$E = \frac{3}{2} \times 2 \ln(2) - (-2) \times 3 \ln(2)$$

$$E = 9 \ln(2)$$

$$F = \frac{\ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$F = \frac{\ln((\sqrt{3} - 1) \times (\sqrt{3} + 1))}{2}$$

$$F = \frac{\ln(3 - 1)}{2}$$

$$F = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$G = \frac{\ln(5) - \ln(10)}{2 \ln(\sqrt{2})}$$

$$G = \frac{\ln(5) - \ln(2) - \ln(5)}{2 \ln(2^{\frac{1}{2}})}$$

$$G = \frac{-\ln(2)}{\ln(2)}$$

$$G = -1$$

$$H = \frac{\ln(100) - 2 \ln(2)}{\ln(5)}$$

$$H = \frac{\ln(5) + \ln(5) + \ln(2) + \ln(2) - 2 \ln(2)}{\ln(5)}$$

$$H = \frac{2 \ln(5)}{\ln(5)}$$

$$H = 2$$

$$I = \frac{\frac{1}{3} \ln(9) - 4 \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(3)}$$

$$I = \frac{\frac{1}{3} \ln(3^2) - 4 \ln(3^{\frac{1}{2}}) - \ln(3^{-1})}{\ln(3)}$$

$$I = \frac{2 \times \frac{1}{3} \ln(3) - \frac{1}{2} \times 4 \ln(3) - (-1) \ln(3)}{\ln(3)}$$

$$I = -\frac{1}{3}$$

2. La principale erreur dans ces inéquations est de diviser par le logarithme d'un nombre dans l'intervalle $]0; 1[$ qui est **négalif** où il ne faut pas oublier de changer le sens de l'inégalité!

On résout ces inéquations dans $\mathbb{N}$.

(a)

$$1,05^n \geq 1,5 \iff \ln(1,05^n) \geq \ln(1,5)$$

$$\iff n \ln(1,05) \geq \ln(1,5)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)}$$

$$\iff n \geq 9$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad 0,92^n \leq 0,75 &\iff \ln(0,92^n) \leq \ln(0,75) \\
&\iff n \ln(0,92) \leq \ln(0,75) \\
&\iff n \geq \frac{\ln(0,75)}{\ln(0,92)} \quad \text{car } \ln(0,92) < 0 \\
&\iff \boxed{n \geq 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2 &\iff \ln(1,03^n) \geq \ln(2) \\
&\iff n \ln(1,03) \geq \ln(2) \\
&\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \\
&\iff \boxed{n \geq 24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad 0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n &\iff \ln(0,2) \geq \ln(0,91^n) \\
&\iff \ln(0,2) \geq n \ln(0,91) \\
&\iff \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,91)} \leq n \quad \text{car } \ln(0,91) < 0 \\
&\iff \boxed{n \geq 18}
\end{aligned}$$

3. (a) On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$.

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) &= 25 \\ 2\ln(x) + \ln(y) &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X + Y &= 25 \\ 2X + Y &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -X &= 24 \\ 2X + Y &= 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} X &= -24 \\ 2 \times (-24) + Y &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X &= -24 \\ Y &= 49 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x) &= -24 \\ \ln(y) &= 49 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x &= e^{-24} \\ y &= e^{49} \end{cases}}$$

(b) On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$.

$$\begin{cases} 3e^x + e^y &= 4 \\ e^x - 2e^y &= -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3X + Y &= 4 \\ X - 2Y &= -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3X + Y &= 4 \\ -3X + 6Y &= 15 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -3 \times L_2$$

$$\iff \begin{cases} 3X + Y &= 4 \\ 7Y &= 19 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} 3X + \frac{19}{7} &= 4 \\ Y &= \frac{19}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X &= \frac{3}{7} \\ Y &= \frac{19}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x &= \frac{3}{7} \\ e^y &= \frac{19}{7} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x &= \ln\left(\frac{3}{7}\right) \\ y &= \ln\left(\frac{19}{7}\right) \end{cases}}$$

(c)

$$\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) = 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) = 9 \\ 2\ln(x) + 3\ln(y) = 0 \end{cases}$$

On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$.

$$\begin{cases} \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) = 9 \\ 2\ln(x) + 3\ln(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X + \frac{1}{2}Y = 9 \\ 2X + 3Y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2X - Y = -18 \\ 2X + 3Y = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow -2 \times L_1$$

$$\iff \begin{cases} -2X - Y = -18 \\ 2Y = -18 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} -2X - (-9) = -18 \\ Y = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = \frac{27}{2} \\ Y = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x) = \frac{27}{2} \\ \ln(y) = -9 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = e^{\frac{27}{2}} \\ y = e^{-9} \end{cases}}$$

2 Exercices du manuel

A page 238

Partie A

1.
 - $e^x = 1 \iff x = 0$.
 - L'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution réelle car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - L'équation $e^x = -1$ n'a pas de solution réelle car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Cependant, cette équation admet une infinité de solutions complexes : $\mathcal{S} = \{i\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 - $e^x = e \iff e^x = e^1 \iff x = 1$.
2. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $2 \in]0; +\infty[$.
Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. L'encadrement obtenu pour la solution α est : $0,69 \leq \alpha \leq 0,70$.

```
from math import exp

def solution(precision):
    reponse=0
    while exp(reponse)<2:
        reponse=reponse+precision
    return(reponse)
```

Partie B

1. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\alpha \in]0; +\infty[$.
Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = \alpha$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. Voilà le code que l'on obtient :

```
from math import exp

def solution(alpha):
    reponse = 0
    while exp(reponse) < alpha:
        reponse = reponse + 0.001
    return reponse
```

Bilan :

D'après la question 1 de la partie B, l'équation $e^x = \alpha$ n'admet une unique solution que lorsque $\alpha > 0$. La fonction étant toujours strictement positive, cette équation n'admet pas de solution lorsque $\alpha \leq 0$.
Par conséquent, **le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul n'existe pas**.

α	1	2	4	8	10	100
Logarithme népérien de α	0	0,693	1,386	2,079	2,303	4,605

22 page 250

1. $\ln(x+1) = 1 \iff x+1 = e^1$
 $\iff \boxed{x = e - 1}$
2. $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0 \iff x^2 + 6x + 10 = e^0$
 $\iff x^2 + 6x + 9 = 0$
 $\iff (x+3)^2 = 0$
 $\iff x+3 = 0$
 $\iff \boxed{x = -3}$
3. $\ln(x^2 + 1) = \ln(2) \iff x^2 + 1 = 2$
 $\iff x^2 - 1 = 0$
 $\iff (x-1)(x+1) = 0$
 $\iff x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0$
 $\iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = -1}$
4. $\ln\left(\frac{1}{x-2}\right) = \ln(5) \iff \frac{1}{x-2} = 5$
 $\iff x-2 = \frac{1}{5}$
 $\iff \boxed{x = \frac{11}{5}}$

27 page 250

1. $e^{2x+1} = 3 \iff 2x+1 = \ln(3)$
 $\iff \boxed{x = \frac{\ln(3) - 1}{2}}$
2. $e^{-4x+2} - 5 = 0 \iff e^{-4x+2} = 5$
 $\iff -4x+2 = \ln(5)$
 $\iff \boxed{x = \frac{2 - \ln(5)}{4}}$
3. $\frac{1}{e^{x-7}} = \sqrt{2} \iff e^{-x+7} = \sqrt{2}$
 $\iff -x+7 = \ln(\sqrt{2})$
 $\iff \boxed{x = 7 - \ln(\sqrt{2})}$

60 page 252

1. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff X^2 - 5X + 6 = 0$ en posant $X = e^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. L'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1$ et donc cette équation a deux solutions réelles $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$. Ces deux nombres sont strictement positif donc les solutions de $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ sont $x_1 = \ln(X_1) = \ln(2)$ et $x_2 = \ln(X_2) = \ln(3)$.
2. $e^{2x} - 6e^x + 4 = 0 \iff X^2 - 6X + 4 = 0$ en posant $X = e^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. L'équation $X^2 - 6X + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 20$ et donc cette équation a deux solutions réelles $X_1 = 3 + \sqrt{5}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{5}$. Ces deux nombres sont strictement positif donc les solutions de $e^{2x} - 6e^x + 4 = 0$ sont $x_1 = \ln(3 + \sqrt{5})$ et $x_2 = \ln(3 - \sqrt{5})$.

62 page 252

1. L'inéquation $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$ peut s'écrire $X^2 - 7X + 12 > 0$ avec $X = e^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. Les racines du trinôme $X^2 - 7X + 12$ sont $X_1 = 4$ et $X_2 = 3$. Donc $X^2 - 7X + 12 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln(3)[\cup]\ln(4); +\infty[$.
2. L'inéquation $e^{2x} + e^x - 6 > 0$ peut s'écrire $X^2 + X - 6 > 0$ avec $X = e^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. Les racines du trinôme $X^2 + X - 6$ sont $X_1 = -3$ et $X_2 = 2$. Donc $X^2 + X - 6 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[\Leftrightarrow x \in]\ln(2); +\infty[$.

66 page 252



Une expression de la forme $\ln(u(x))$ est définie si, et seulement si, $u(x) > 0$.

Autrement dit, pour déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions, on va étudier la quantité à l'intérieur du logarithme et déterminer sur quel intervalle cette quantité est strictement positive.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 + 1 > 0$, donc cette fonction est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.
De plus, $(x+1)(x-1) > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
Par conséquent, cette fonction est définie sur $\boxed{]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0$ pour $x \neq 2$.
Cette fonction est donc définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1 > 0$, donc cette fonction est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.
- 5.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$2x-1$	-	-	0	+
$(x+2)(2x-1)$	+	0	-	0

Ainsi, $(x+2)(2x-1) > 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Par conséquent, cette fonction est définie sur $\boxed{]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[}$.

138 page 262

1. (a) Pour tout $0 < x \leq 1$, on a $f(x) = x(1 - \ln(x))^2 = x - 2x \ln(x) + x \ln(x)^2$.
La fonction f est dérivable sur $]0; 1]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; 1]$.
Pour tout $x \in]0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - 2\ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{x}{x} \times \ln(x) + \ln(x)^2 \\
 &= \ln(x)^2 - 1 \\
 &= (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1)
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\ln(x) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(x) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= e \notin]0; 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(x) + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) &\geq -1 \\ \Leftrightarrow x &\geq e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(x) - 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\geq e \notin]0; 1]\end{aligned}$$

x	0	e^{-1}	1
$\ln(x) + 1$	-	0	+
$\ln(x) - 1$	-		-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$4e^{-1}$	1

$$\begin{aligned}f(e^{-1}) &= e^{-1} \times (1 - \ln(e^{-1}))^2 = e^{-1} \times (1 - (-1))^2 = 4e^{-1} \\ f(1) &= 1 \times (1 - \ln(1))^2 = 1\end{aligned}$$

2. (a) L'aire du triangle rectangle est approximativement égale à $\frac{1}{2} \times 0,5 \times 2,5 = 0,625$.



Attention aux graduations et donc aux unités

- (b) La tangente $d_{0,2}$ a pour équation :

$$\begin{aligned}y &= g'(0,2)(x - 0,2) + g(0,2) \\ y &= 5x + \ln(0,2) - 1\end{aligned}$$

- (c) L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ s'obtient avec

$$\mathcal{A} = \frac{OP_{0,2} \times ON_{0,2}}{2}$$

Or, $P_{0,2}$ a pour ordonnée l'ordonnée à l'origine de la tangente $d_{0,2}$ c'est-à-dire $\ln(0,2) - 1$.
De plus, $N_{0,2}$ a pour abscisse x_N tel que

$$5x_n + \ln(0,2) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_N = \frac{1 - \ln(0,2)}{5}$$

Ainsi, on obtient finalement que :

$$\mathcal{A} = \frac{(\ln(0,2) - 1) \times \left(\frac{1 - \ln(0,2)}{5}\right)}{2} = \frac{1}{2} \times 0,2 \times (1 - \ln(0,2))^2 = 0,1(1 + \ln(5))$$

3. D'après la question 1., l'aire du triangle rectangle est maximale pour $x = e^{-1}$.

Pour cette valeur on a $A(e^{-1}) = \frac{1}{2e}(1 - \ln(e^{-1}))^2 = \frac{2}{e}$.

3 Autres exercices