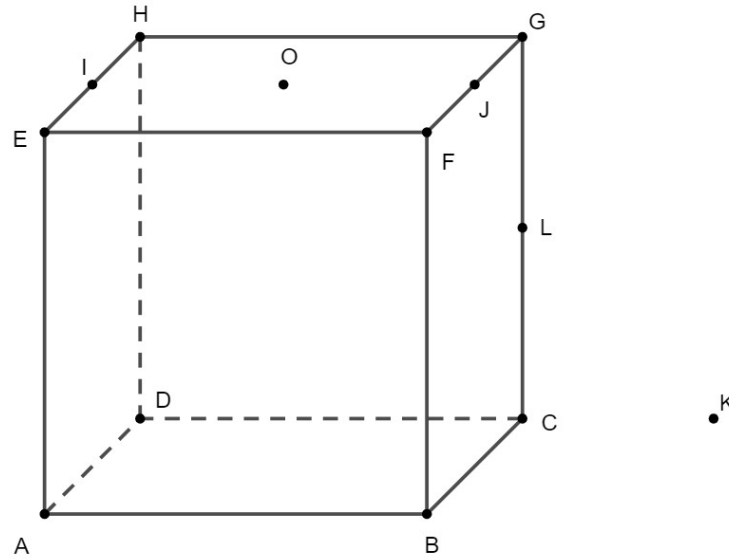


Table des matières

1 Exemples du cours	2
Exemple 10	2
Exemple 12	2
2 Exercices du manuel	4
22 page 72	4
23 page 72	4
32 page 73	5
34 page 73	6
46 page 74	6
47 page 74	7
89 page 80	7
3 Autres exercices	9

1 Exemples du cours

Exemple 10



1. $K \in (DC)$ donc $(DK) \parallel (HG)$ car $ABCDEFGH$ est un cube.

I est le milieu de $[HE]$ et J est le milieu de $[FG]$ donc $(IJ) \parallel (HG)$ car $EFGH$ est un carré.

De plus, $O \in (IJ)$ donc $(IO) \parallel (HG)$

Ainsi, $(DK) \parallel (HG) \parallel (IO)$ donc les droites (DK) et (IO) sont parallèles.

2. Les droites (BJ) et (EF) sont non coplanaires.

Pour démontrer cela, supposons par l'absurde que les droites (BJ) et (EF) sont coplanaires.

On en déduit alors que les points B, J, E et F sont coplanaires.

Or, comme $G \in (FJ)$, alors $G \in (EFB)$, ce qui est absurde car $ABCDEFGH$ est un cube.

3. $J \in (FG)$ donc $J \in (BCGF)$ et $L \in (CG)$ donc $L \in (BCGF)$. Ainsi $(JL) \subset (BCGF)$.

De plus, $(BC) \subset (BCGF)$ donc les droites (JL) et (BC) sont coplanaires.

Montrons maintenant que ces deux droites ne sont pas parallèles.

Pour démontrer cela, supposons par l'absurde que les droites (BC) et (JL) sont parallèles.

Comme $ABCDEFGH$ est un cube et que $J \in (FG)$, la parallèle à la droite (BC) passant par le point J est (FG) .

Ainsi, on a aussi $L \in (FG)$ ce qui est absurde.

En conclusion, les droites (BC) et (JL) sont coplanaires mais ne sont pas parallèles donc

les droites (BC) et (JL) sont sécantes.

Exemple 12

$I \in (ABC)$ et $J \in (ABC)$ donc les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires.

Montrons maintenant que ces deux droites ne sont pas parallèles.

On considère le triangle ABC .

Les points A, J et C sont alignés, tout comme les points A, I , et B .

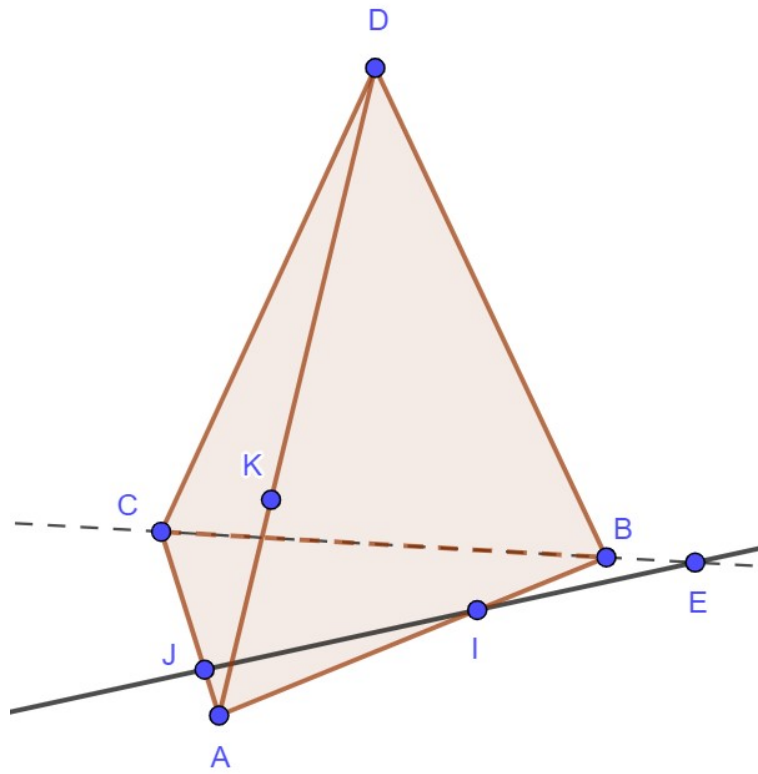
On a :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{\frac{1}{4}AC}{AC} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{AI}{AB} = \frac{\frac{2}{3}AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, $\frac{AJ}{AC} \neq \frac{AI}{AB}$ donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles.

Par conséquent, les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires mais ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes en un point noté E .

En conclusion, la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) .

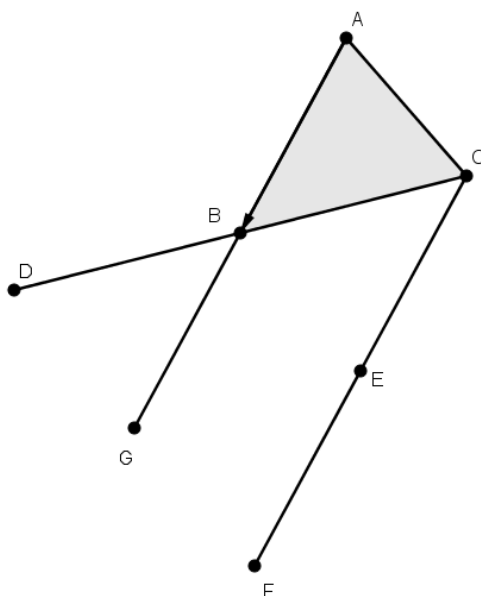


Pour les allergiques de la géométrie sans coordonnées, nous verrons plus tard une autre méthode pour traiter ce type d'exercices, mais c'est bien plus long !

2 Exercices du manuel

22 page 72

1. Voici une représentation de la figure.



2.  Il faut essayer de traduire les données de l'énoncé en termes de relations vectorielles.

E est l'image de C par t donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

F est l'image de E par t donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

G est l'image de B par t donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

En conclusion, on a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CF}$ donc $AGFC$ est un parallélogramme.

3. Méthode n°1 :

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ donc B est le milieu du segment $[CD]$.

De plus, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ donc B est aussi le milieu de $[AG]$.

Ainsi, B est le milieu de $[CD]$ et $[AG]$ donc $ACGD$ est un parallélogramme. On a alors aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DG}$.

Enfin, comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GF}$ puisque $AGFC$ est un parallélogramme, on a finalement $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GF}$.

En conclusion, G est le milieu du segment $[FD]$.

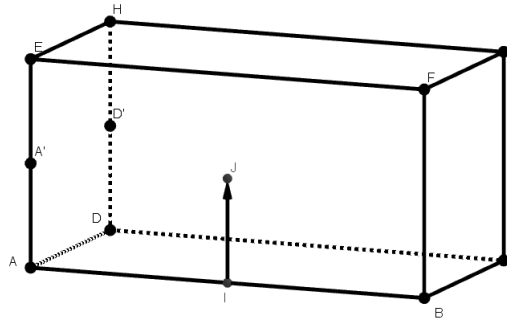
Méthode n°2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{CA} && \text{car } AGFC \text{ est un parallélogramme} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GB} \\ &= \overrightarrow{GD} && \text{d'après la relation de Chasles} \end{aligned}$$

On en déduit alors que G est le milieu du segment $[FD]$.

23 page 72

1. Voici une représentation de la figure.



2. Voir ci-dessus.

3. A' est l'image de A par la translation t donc $\overline{AA'} = \overline{IJ}$.

D' est l'image de D par la translation t donc $\overline{DD'} = \overline{IJ}$.

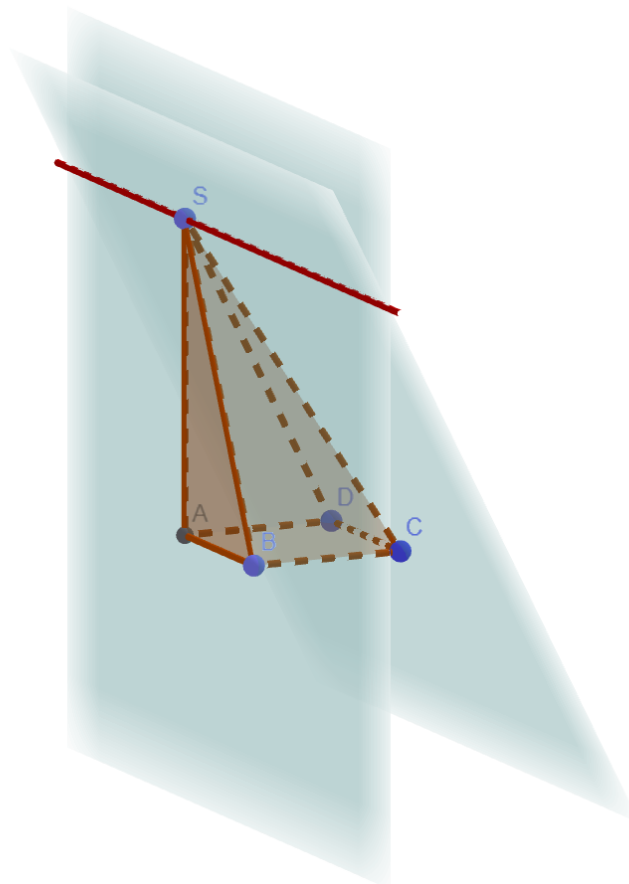
On en déduit alors que $\overline{AA'} = \overline{DD'}$ donc que le quadrilatère $AA'D'D$ est un parallélogramme et finalement on a $\overline{AD} = \overline{A'D'}$. De plus, comme $ABCDEFGH$ est un pavé, on a $\overline{AD} = \overline{EH}$.

Ainsi, $\overline{A'D'} = \overline{AD} = \overline{EH}$. Comme $\overline{A'D'} = \overline{EH}$, on en déduit que $A'D'HE$ est un parallélogramme.

32 page 73

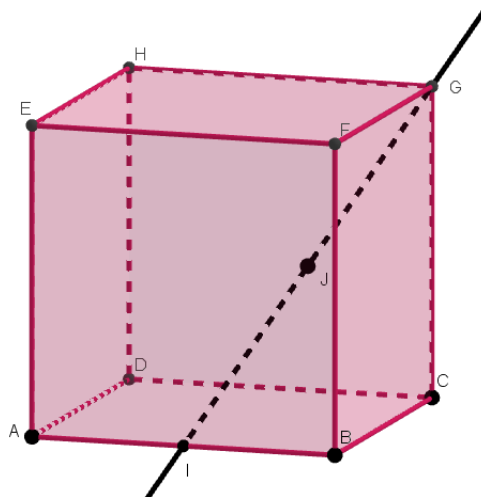
1. $S \in (SBO)$ et $S \in (SAC)$ donc $S \in (SBO) \cap (SAC)$. $O \in (SBO)$ et O est le centre du carré $ABCD$. Donc O est le milieu de $[AC]$ donc $O \in (SAC)$ et $O \in (SBO) \cap (SAC)$. Les plans (SBO) et (SAC) sont sécants. L'intersection de ces deux plans est une droite dont deux points sont S et O . L'intersection cherchée est donc la droite (SO) .

2. De façon évidente, $S \in (SAB) \cap (SDC)$. $(AB) \subset (SAB)$ et $(DC) \subset (SDC)$. De plus, $(AB) \parallel (DC)$. D'après le théorème du toit, l'intersection des plans (SAB) et (SDC) est une droite parallèle aux droites (AB) et (DC) . Cette droite passe de plus par le point S dont on sait qu'il appartient à l'intersection des deux plans.



34 page 73

I est le milieu de $[AB]$. Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



D'une part,

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

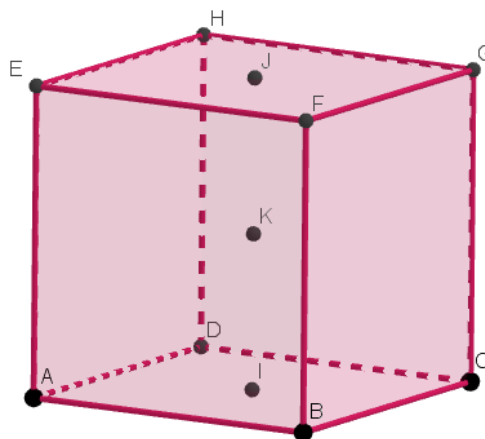
On a donc :

$$\overrightarrow{IG} = 2 \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les points I, J et G sont alignés.

46 page 74

1. Voici une représentation de la figure.



2.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$
 d'après la relation de Chasles
car $ABCDEFGH$ est un cube

3. K est le centre du cube $ABCDEFGH$ donc

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

4. On en déduit alors que

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$$

En conclusion, K est bien le milieu de $[AG]$.

47 page 74

Commençons par traduire les données de l'énoncé en égalités vectorielles.

I est le milieu de $[AB]$ donc $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

J est le milieu de $[CD]$ donc $\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$.

K est le milieu de $[IJ]$ donc $\vec{KI} + \vec{KJ} = \vec{0}$.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} &= \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} + \vec{MJ} + \vec{JC} + \vec{MJ} + \vec{JD} \\ &= 2(\vec{MI} + \vec{MJ}) \\ &= 2(\vec{MK} + \vec{KI} + \vec{MK} + \vec{KJ}) \\ &= 4\vec{MK}\end{aligned}$$

89 page 80

PARTIE A

1. K est le milieu de $[DC]$ donc $\vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{AD} &= \vec{AK} + \vec{KC} + \vec{AK} + \vec{KD} && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= 2\vec{AK}\end{aligned}$$

2. I est le milieu de $[AB]$ donc $\vec{AB} = 2\vec{AI}$.

G est le milieu de $[IK]$ donc $\vec{GI} + \vec{GK} = \vec{0}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} &= 2\vec{AI} + 2\vec{AK} && \text{d'après la question 1.} \\ &= 2(\vec{AI} + \vec{AK}) \\ &= 2(\vec{AG} + \vec{GI} + \vec{AG} + \vec{GK}) && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= 4\vec{AG}\end{aligned}$$

3. (a) K est le milieu de $[CD]$ donc $\vec{KC} = \frac{1}{2}\vec{DC}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{\Omega A} &= \vec{\Omega B} + \vec{BA} \\ &= \frac{2}{3}\vec{KB} + \vec{BA} \\ &= \frac{2}{3}\vec{KC} + \frac{2}{3}\vec{CB} + \vec{BA} && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{3}\vec{DC} + \frac{2}{3}\vec{CB} + \vec{BA}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vec{\Omega A} &= \frac{1}{3}\vec{DC} + \frac{2}{3}\vec{CB} + \vec{BA} \\ &= \frac{1}{3}\vec{DA} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{BA} && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AD}\end{aligned}$$

(c) D'après les questions précédentes, on en déduit donc :

$$\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

De plus, on sait que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3} \times 4\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires donc les points Ω , A et G sont alignés .

3 Autres exercices