Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 12

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$.

  Pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} x+1+\frac{2}{x-1} &= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{x^2-1+2}{x-1} \\ &= \frac{x^2+1}{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.

  Pour tout $x \in D$,

$$f(x) - (x+1) = x + 1 + \frac{2}{x-1} - (x+1) = \frac{2}{x-1}$$

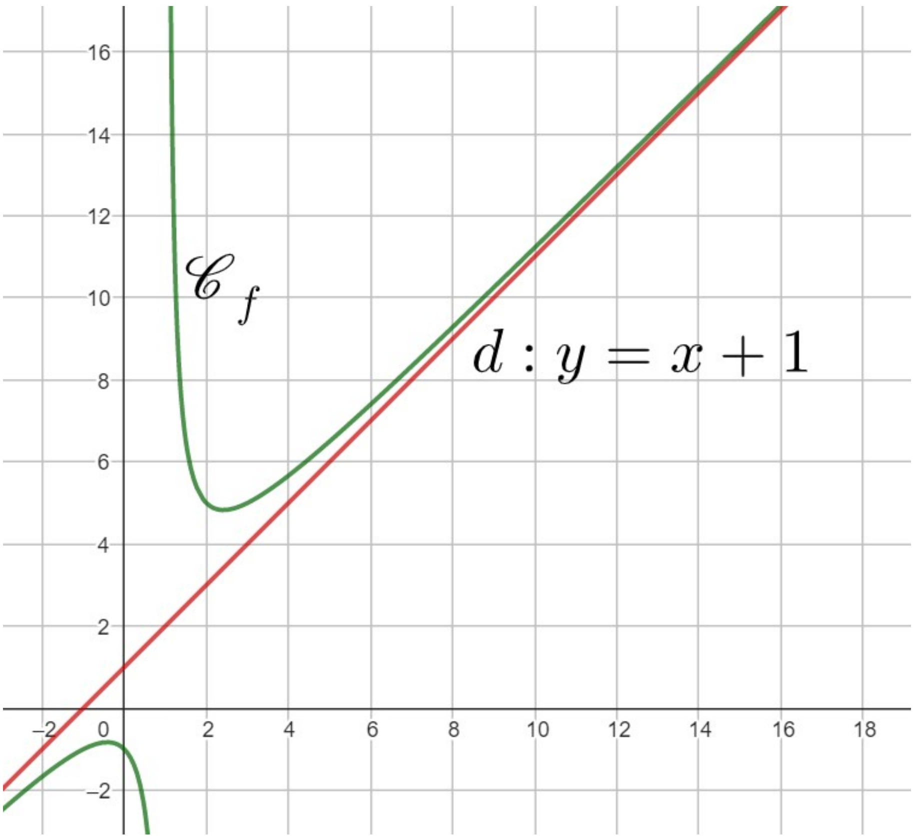
  Par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0}$.

- Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x + 1$?

  Graphiquement, on en déduit donc que l'écart vertical entre la droite d'équation $y = x + 1$ et $\mathcal{C}_f$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

  On dit que **la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$**.

- Représenter ce résultat sur un graphique.



2 Exercices du manuel

27 page 177

On applique les propriétés 8 et 9 du cours sur la limite à l'infini d'un polynôme et d'une fonction rationnelle.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^5+10x^4+x^2+x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^5 = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^5+10x^4+x^2+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^5 = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 = 3$.

40 page 178

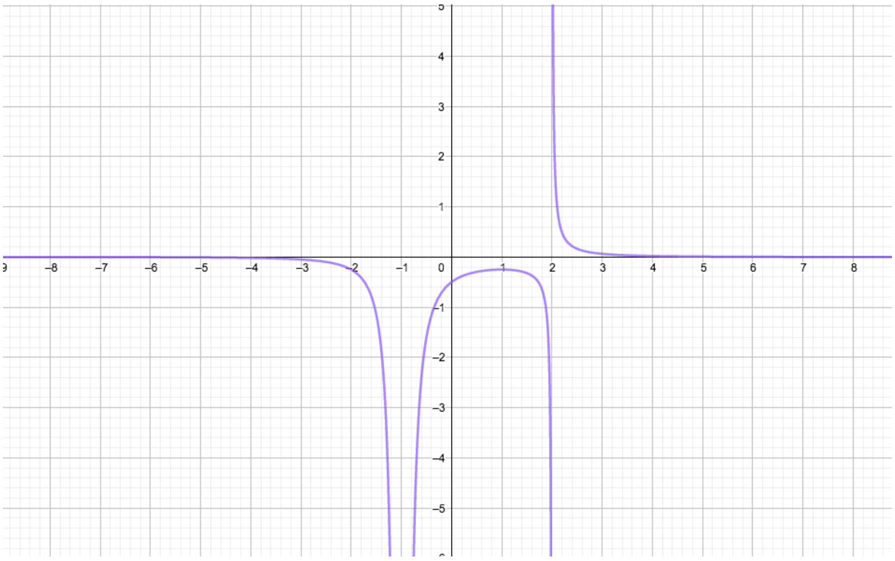
1. Graphiquement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.
2. On peut conjecturer le tableau de variations et les limites ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

3. $\mathscr{C}_f$ semble admettre une asymptote horizontale d'équation $y=2$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   $\mathscr{C}_f$ semble admettre deux asymptotes verticales d'équation $x=-3$ et $x=2$.

42 page 178

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$.
2. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes verticales d'équation $x=-1$ et $x=2$.
3. La courbe ci-dessous est une représentation graphique possible de la fonction f.



55 page 180

1. On a $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$.

D'une part $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (\mathrm{e}^x - 1) = 0^-$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty}$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\mathrm{e}^x - 1) = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty}$.

2. On a $\lim\limits_{x \to 3} (x^2+1) = 10$.

Or, pour tout réel x, $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (x^2-9) = 0^-$ d'où, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} g(x) = -\infty}$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x^2-9) = 0^+$d'où, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} g(x) = +\infty}$.

3. On a $\lim\limits_{x \to -1} (x^3-4) = -5$.

Or, pour tout réel x, on a $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} (x^2+3x+2) = 0^-$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} h(x) = +\infty}$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} (x^2+3x+2) = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} h(x) = -\infty}$.

4. On a $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x^3-8) = 0^-$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} k(x) = +\infty}$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x^3-8) = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} k(x) = -\infty}$.

75 page 183

D'après le théorème de limite à l'infini d'une fonction rationnelle :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3}{3x^2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+5x}{3x^2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3}}$.

77 page 183

Limite finie : Théorème des gendarmes
Limite infinie : Théorème de comparaison (et on ne garde qu'une inégalité)

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ \iff & -2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2 \\ \iff & x-2 \leqslant x+2\sin x \leqslant x+2 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x-2}{x} \leqslant \frac{x+2\sin x}{x} \leqslant \frac{x+2}{x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

De même, pour tout $x < 0$,

$$\frac{x-2}{x} \geqslant \frac{x+2\sin x}{x} \geqslant \frac{x+2}{x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

2. Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$$

Donc pour tout $x > 0$,

$$x^3 \leqslant (2+\cos(x))x^3 \leqslant 3x^3$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

De même, pour tout $x < 0$,

$$x^3 \geqslant (2+\cos(x))x^3 \geqslant 3x^3$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

3. Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \iff x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$$

Donc, pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1} \qquad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0;+\infty[$$

Et donc, pour tout $x > 1$,

$$\frac{x}{x-1} \geqslant \frac{x}{x+\sin x} \geqslant \frac{x}{x+1}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1}$.

De même, pour tout $x < -1$,

$$\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1} \qquad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]-\infty;0[$$

Donc, pour tout $x < -1$,

$$\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x+\sin x} \leqslant \frac{x}{x+1}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1}$.

4. Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \iff -3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3 \iff x^2-3 \leqslant x^2+3\sin x \leqslant x^2+3$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty}$.

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty}$.

86 page 183

1. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+3)=3$.

Finalement, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3}=-\infty}$

2. Pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}\right)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}}$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ donc, par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}=0$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}=1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$ donc, par produit puis somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}=1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}}=1$.

D'où, au final, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3}=0}$

3. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$ par croissances comparées.

Par somme de limites , $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5)=-5$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{2x}-3)=-3$.

En conclusion, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3}=\frac{5}{3}}$

4. Pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3}=\frac{x\mathrm{e}^x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x\mathrm{e}^x}}{1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ donc, par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}=0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^x=+\infty$ et donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x\mathrm{e}^x}=0$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x\mathrm{e}^x}\right)=1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty$, d'où, par quotient puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}\right)=1$.

D'où, au final, par quotient puis produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3}=0}$

104 page 188

1. (a)
- $\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

  Par somme de limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty}$

- Pour tout $x\neq 0$, $g(x)=1+x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$.

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$

  De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$.

  On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=e^x-1$.
Or,

$$g'(x)\geqslant 0 \iff e^x-1\geqslant 0 \iff e^x\geqslant 1 \iff x\geqslant 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$.
Ainsi, la fonction g admet un minimum en $x = 0$ égal à 2.
Par conséquent, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2$ donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}}$.

2. ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$. (ce n'est pas une FI)

Par somme de limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

▪ Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

Par sommes de limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}\left(e^x + 1 - x\right) = e^{-x} g(x)$$

4. D'après la question **1. (b)**, pour tout réel x, $g(x) > 0$.
De plus, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$.
Par conséquent, pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

5. On a $f(0) = 0 + 1 + \dfrac{0}{e^0} = 1$ et $f'(0) = e^{-0} \times g(0) = 2$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est de la forme

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$\boxed{y = 2x + 1}$$

6. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T, on étudie le signe de la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$h(x) = f(x) - (2x + 1)$$
$$h(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1)$$
$$h(x) = \frac{x}{e^x} - x$$
$$h(x) = \frac{x}{e^x}\left(1 - e^x\right)$$

De plus, $1 - e^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^x \iff e^0 \geqslant e^x \iff 0 \geqslant x$.
La fonction h admet donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Ainsi, pour tout réel x, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x)-(2x+1) \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant 2x+1$.
On en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est toujours situé en dessous de } T}$ sauf en $x=0$ où les deux courbes se superposent.

3 Autres exercices