Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 3

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 10]$:

x	-3		10
$f(x)$			1
		$\nearrow$	
	-4		

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 10]$.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3; 10]$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-3; 10]$.
- $f(-3) = -4 < 0$ et $f(10) = 1 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 10]$.

Exemple 4

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-4; +\infty[$:

x	-4		$+\infty$
$f(x)$	$\|\ +\infty$		
		$\searrow$	
			2

Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-4; +\infty[$.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]-4; +\infty[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-4; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = +\infty > 5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 < 5$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-4; +\infty[$.

Exemple 5

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; +\infty[$:

x	-10		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	-1				6		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-4				$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-10; +\infty[$.
2. Dresser le tableau de signes de f.

<u>Étude sur l'intervalle $[-10; -1]$:</u>

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-10; -1]$ est -1 donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Étude sur l'intervalle $[-1;2]$:

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1;2]$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;2]$.
- $f(-1) = -4 < 0$ et $f(2) = 6 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;2]$.

Étude sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
- $f(2) = 6 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet bien exactement deux solutions sur l'intervalle $[-10;+\infty[$.

On peut en déduire le tableau de signes de la fonction f sur $[-10;+\infty[$:

x	-10		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;3]$.
2. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de cette solution d'amplitude 10^{-2}.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 4x = x(6x-4)$$

Ainsi,

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 6x - 4 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \tag{1}$$

De plus, $a = 6 > 0$ donc f' est positive à l'extérieur des racines.
On en déduit en particulier que la fonction f' est <u>strictement</u> positive sur l'intervalle $[1;3]$.

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;3]$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[1;3]$ car dérivable sur cet intervalle.
- $f(1) = -1 < 0$ et $f(3) = 35 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;3]$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $1,86 < \alpha < 1,87$.

2 Exercices du manuel

87 page 207

1. La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule par sur I, elle est donc dérivable sur I.
Pour tout $x > -4$,

$$f'(x) = \frac{2 \times (x+4) - (2x+3) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } I}$.

2.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

- Initialisation :

$u_0 = 0,1$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2 \times 0,1 + 3}{0,1+4} = \dfrac{32}{41}$.
Ainsi, on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$.
On a :

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow & f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1) & \text{car la fonction } f \text{ est croissante sur } [0;1] \\ \Rightarrow & 0 \leqslant \dfrac{3}{4} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1 & \text{car } f(0) = \dfrac{3}{4} \text{ et } f(1) = 1 \end{array}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]}$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc convergente}}$ vers $\ell \in [0;1]$.
On sait ensuite que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction f est continue sur $[0;1]$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- Pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$
- La suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in [0;1]$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{2\ell+3}{\ell+4} = \ell \\ \iff & 2\ell + 3 = \ell^2 + 4\ell \\ \iff & \ell^2 + 2\ell - 3 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont $\ell_1 = -3$ et $\ell_2 = 1$.
Puisque $\ell \in [0;1]$, on a alors $\boxed{\ell = 1}$.

3 Autres exercices

BAC 2022 Métropole - Sujet 1

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\ ;\ 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.
La fonction f est dérivable sur $[0;10]$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $[0;10]$.

Pour tout $t \in [0;10]$, $f(t) = u(t)\times v(t)$ avec $u(t) = 3t$, $u'(t) = 3$, $v(t) = e^{-0,5t+1}$, $v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$

On a donc, pour tout $t \in [0;10]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 3e^{-0,5t+1} + 3t\times(-0,5e^{-0,5t+1}) \\ &= e^{-0,5t+1}(3 + 3t\times(-0,5)) \\ &\boxed{f'(t) = 3e^{-0,5t+1}(-0,5t+1)} \end{aligned}$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.
Pour tout $t \in [0;10]$, $e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ est du même signe que $-0,5t+1$.
De plus, $-0,5t+1 \geqslant 0 \iff -0,5t \geqslant -1 \iff t \leqslant 2$.
On en déduit le tableau de variation de f sur $[0;10]$:

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30e^{-4}$

$f(0) = 0$, $f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-5+1} = 30e^{-4}$.

(c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$ est atteint pour $t = 2$ et $f(2) = 6$.
On en déduit que la dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. (a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\ ;\ 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est $3,46$.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[0;2]$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$.
- $f(0) = 0$, $f(2) = 6$ et $5 \in [0;6]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 2]$.

$f(1) \approx 4,95 < 5$ et $f(2) = 6 > 5$ donc $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.
$f(1) \approx 4,95 < 5$ et $f(1,1) \approx 5,18 > 5$ donc $1 \leqslant \alpha \leqslant 1,1$.
$f(1,02) \approx 4,99 < 5$ et $f(1,03) \approx 5,02$ donc $1,02 \leqslant \alpha \leqslant 1,03$.

(b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

x	0	α	2	β	10
$f(t)$	0	5	6	5	30^{-4}

D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha; \beta]$. De plus, $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
On en déduit que le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Ensuite, on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$.
Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **(a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \leqslant 6$.

(c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.

(b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

(c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

BAC 2022 Polynésie - Sujet 2

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus.
L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+} & = & 0,008u_n\,(200 - u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.
L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.

$$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2$$

En 2022, il y aura donc environ 51 oiseaux dans la colonie.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200 - x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} \\ &\iff \boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 75} \end{aligned}$$

3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
Pour tout $x \in [0; 100]$ on a $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$.
f est une fonction dérivable sur $[0; 100]$ car c'est une fonction polynôme et, pour tout $x \in [0; 100]$,

$$f'(x) = -0,016x + 1,6$$

De plus,

$$f'(x) \geqslant 0 \iff -0,016x + 1,6 \geqslant 0 \iff -0,016x \geqslant 1,6 \iff x \leqslant \frac{1,6}{0,016} \iff x \leqslant 100$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 100]$, $f(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur $[0; 100]$.
Enfin, $f(0) = 0$ et $f(100) = 0,008 \times 100 \times (200 - 100) = 80$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 100]$:

x	0	100
$f(x)$	0 ↗	80

(b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$$

- Initialisation :

$u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 100$.

On a : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$ d'après l'hypothèse de récurrence
$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(100)$ car la fonction f est **croissante** sur $[0;100]$
$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 80 \leqslant 100$ car $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100}$$

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 100.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$ vers un réel $\ell \in [0,100]$.

(d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- La fonction f est continue sur $[0;100]$ car c'est une fonction polynôme.
- La fonction f est définie sur $[0;100]$ et à valeurs dans $[0;100]$. (question **3.(a)**)
- La suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in [0,100]$. (question **3.(c)**)

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
D'après la question **2.)**, on a donc $\ell = 0$ ou $\ell = 75$.
Cependant, la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 40$, donc $\boxed{\ell = 75}$.
Au fil des années, le nombre d'oiseaux dans la colonie va tendre vers 75.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.
Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil `p`, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

BAC 2022 Asie - Sujet 2

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet qu'avec ce modèle la suite (p_n) est définie de la façon suivante : $p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

(a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul)
et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

(b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

(c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

2. **(a)** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$$

(b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

(a) Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

(b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).