Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 12

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option « Livraison Express ».

1. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
Le tirage de chaque bon de commande est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Le bon porte la mention Livraison Express » de probabilité $p = 0,4$.
Comme les 30 tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants.
X comptant le nombre de succès, la variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,4$.

(b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 30 \times 0,4 = 12$$

Sur un grand nombre de prélèvement de 30 bons, on trouve en moyenne 12 bons avec la mention « Livraison Express ».

(c) Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, que 13 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

$$P(X = 13) = \binom{30}{13} \times 0,4^{13} \times 0,6^{30-13} \approx 0,136$$

La probabilité que 13 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ $0,136$.

(d) Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, qu'au moins 16 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».
A l'aide de la calculatrice, on trouve que :

$$P(X \geqslant 16) \approx 0,097$$

La probabilité qu'au moins 16 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ $0,097$.

2. On prélève au hasard n bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

(a) Démontrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$.
X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,4^0 \times (1 - 0,4)^{n-0} \\ &= 1 - 0,6^n \end{aligned}$$

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimum de bons à prélever pour que la probabilité qu'au moins un des bons ait le mention « Livraison Express » soit supérieure à $0,99$.
$P(X \geqslant 1)$ est la probabilité de l'événement « au moins un des bons prélevés porte la mention Livraison Express ».
On cherche donc à déterminer le plus petit entier n tel que $1 - 0,6^n \geqslant 0,99$.

On pourra utiliser la fonction logarithme plus tard pour résoudre ce genre d'inéquation mais ici, la calculatrice suffisait.

La suite de terme général $u_n = 1 - 0,6^n$ est strictement croissante. Par ailleurs :

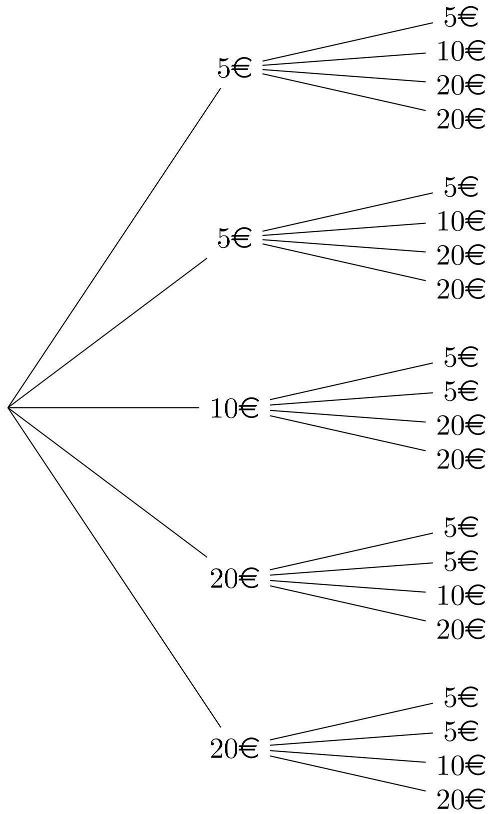
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,6^9 \approx 0,9899 < 0,99 \\ 1 - 0,6^{10} \approx 0,994 > 0,99 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow n = 10$$

De ce fait, le nombre minimal de bons à prélever pour que la probabilité qu'au moins un des bons ait le mention « Livraison Express » soit supérieure à $0,99$. est de 10 bons.

2 Exercices du manuel

Exercice 81 page 329 (Première)

1.



2. Sachant qu'il faut payer 20 € pour participer, les gains possibles sont -10€, -5€, 5€, 10 € et 20€.
On peut alors en déduire la loi de probabilité de G :

x_i	-10	-5	5	10	20
$P(X = x_i)$	$\dfrac{2}{20}$	$\dfrac{4}{20}$	$\dfrac{8}{20}$	$\dfrac{4}{20}$	$\dfrac{2}{20}$

3. On a :

$$E(G) = -10 \times \frac{2}{20} - 5 \times \frac{4}{20} + 5 \times \frac{8}{20} + 10 \times \frac{4}{20} + 20 \times \frac{2}{20} = 4$$

$E(G) > 0$ donc le jeu est très intéressant pour le joueur.
Si il joue un très grand nombre de parties, il gagnera en moyenne 4 € par partie.

Exercice 54 page 366

1. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« Le véhicule est électrique » et « Le véhicule n'est pas électrique »).

2. Non car il y a plus de deux issues.

3. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« L'immatriculation se termine par un Z » et « L'immatriculation ne se termine pas par un Z »).

4. Non car il y a plus de deux issues.

5. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« La longueur est inférieure ou égale à 450 cm » et « La longueur est strictement supérieure à 450 cm »).

Exercice 68 page 368

En utilisant la calculatrice et la formule des probabilités totales, on obtient les résultats suivants.

1. $P(X = 13) \approx 0,184$

2. $P(X < 15) \approx 0,755$

3. $P(7 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0,753$

4. $P_{X<15}(X = 13) = \frac{P((X=13)\cap(X<15))}{P(X<15)} = \frac{P(X=13)}{P(X<15)} \approx \frac{0,184}{0,755} \approx 0,244$

5. Si X est compris dans l'intervalle $[7; 14]$ alors il est nécessairement plus petit que 15 donc $P_{7\leqslant X\leqslant 14}(X < 15) = 1$.

6. $P_{X<15}(7 \leqslant X \leqslant 14) = \frac{P(7\leqslant X\leqslant 14)}{P(X<15)} \approx 0,998$

Exercice 70 page 368

1. Le choix d'une plage par un touriste est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le touriste choisit la place à l'est » et de probabilité $p = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

2. **(a)** Si deux touristes sont heureux, il y a deux plages avec exactement un touriste. Or on sait que $n \geqslant 3$ et qu'il n'y a que deux plages. Il est donc impossible qu'il y ait deux touristes heureux.

(b) Si $n = 3$, « Il y a un touriste heureux » signifie soit qu'il y a un touriste sur la place à l'est (ce qui correspond à l'événement $\{X = 1\}$) soit qu'il y a un touriste sur la plage à l'ouest (ce qui correspond à l'événement $\{X = 2\}$). Ces deux événements ont la même probabilité qui vaut

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2^3}$$

Ainsi, la probabilité qu'un touriste soit heureux vaut :

$$P(X = 1) + P(X = 2) = 2 \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^2} = 0,75$$

(c) « Il y a un touriste heureux » correspond à la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 1\}$ et $\{X = n - 1\}$. Ces deux événements ont la même probabilité qui est égale à :

$$P(X = 1) = P(X = n - 1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

Ainsi, la probabilité qu'un touriste soit heureux est bien égale à :

$$P(X = 1) + P(X = n - 1) = 2 \times \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

(d) Pour $n = 10$, la probabilité pour qu'un touriste soit heureux est égale à $\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{10}{2^9} \approx 0,02$.

Exercice 73 page 368

1. Oui, $n = 1$ et $p = \frac{1}{16}$.

2. Non, on ne compte pas un nombre de succès.

3. Oui, $n = 7$ et $p = \frac{2}{3}$.

4. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.

5. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.

6. Oui, $n = 4$ et $p = \frac{1}{4}$.

7. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes.

8. Oui, $n = 100$ et $p = 0,93$ (en supposant que les personnes se présentent indépendamment les unes des autres).

9. Non, la variable aléatoire ne compte pas un nombre de succès.

10. Oui, $n = 3$ et $p = \frac{4}{11}$.

11. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes. Cependant, dans la pratique, l'hypothèse sera souvent faite qu'un tirage ne modifie par le contenu de l'urne de manière importante (car la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 100 000 pièces est presque égale à la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 99 999 pièces). Si on accepte cette approximation, le tirage peut donc être assimilé à un tirage avec remise. X suit alors une loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 3$ et $p = 0,01$.

Exercice 81 page 369

1. Une journée sans intervention correspond à l'événement $\{X = 0\}$ dont la probabilité est :

$$P(X=0) = \binom{6}{0} \times 0,2^0 \times (1-0,2)^{6-0} = 0,8^6 \approx 0,262$$

2. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$ donc $E(X) = np = 6 \times 0,2 = 1,2$.
Sur un très grand nombre de jours, il y a en moyenne 1,2 intervention par jour.

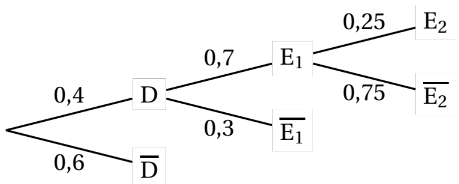
3. On cherche à calculer $P_{X \geqslant 1}(X \geqslant 3)$.

$$P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{P((X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 1))}{P(X \geqslant 1)} = \frac{P(X \geqslant 3)}{P(X \geqslant 1)} \approx 0,134$$

Sachant qu'il y a déjà eu une intervention ce matin, la probabilité, qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui est d'environ 0,134.

Exercice 114 page 377

1. **(a)** On obtient, d'après les données de l'énoncé, l'arbre pondéré suivant.



(b) On obtient, par lecture de l'arbre :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(D \cap E_1) \\ &= P(D) \times P_D(E_1) \\ &= 0,4 \times 0,7 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

(c) F est l'événement contraire de E_2. Or $P(E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$ donc $P(F) = 1 - P(E_2) = 0,93$.
La probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. **(a)** Chaque candidature est une épreuve de Bernoulli de succès « Le candidat est recruté » et de probabilité $0,07$.
Les candidatures sont identiques et indépendantes. X comptant le nombre de succès, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

(b) En appliquant la formule du cours, on obtient :

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \times 0,07^2 \times (1-0,07)^{5-2} \approx 0,039$$

La probabilité qu'exactement deux des cinq amis soient recrutés est environ égale à 0,039.

3. Supposons que n personnes se portent candidats, où n est un entier naturel. On suppose également que les candidatures sont étudiées de manières identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y donnant le nombre de candidats retenus suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,07$.
La probabilité qu'aucun candidat ne soit retenu est égale à :

$$P(Y=0) = \binom{n}{0} \times 0,07^0 \times (1-0,07)^{n-0} \approx 0,93^n$$

La probabilité qu'au moins un candidat soit retenu est donc égale à :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,93^n$$

On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que cette probabilité soit supérieure à 0,999.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,93^{95} \approx 0,99899 < 0,9999 \\ 1 - 0,93^{96} \approx 0,99906 > 0,9999 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \quad n = 96$$

Le nombre minimum de dossiers à traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 est 96.

Exercice 115 page 377

On considère les événements :

- B_1 : « La première boule prélevée est blanche »
- B_2 : « La deuxième boule prélevée est blanche »

1.

2. **(a)** Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La partie est gagnés » de probabilité $p = 0,42$.
Les parties sont supposées identiques et indépendantes.
X comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

(b) L'événement « Le joueur gagne au moins une partie » est l'événement contre de « Le joueur perd toutes les parties ».
Ainsi, la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale a :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,42^0 \times (1 - 0,42)^{n-0} \\ &= 1 - 0,58^n \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $p_{10} \approx 0,996$.

(c) On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \geqslant 1) > 0,99$.
La suite (p_n) est croissante. De plus, $p_8 \approx 0,987$ et $p_9 \approx 0,993$.
Il faut donc jouer au moins 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 99%.
Plus tard, on pourra directement résoudre cette inéquation à l'aide de la fonction $\ln$.

3. $Y_k = 5$ lorsque le joueur tire deux boules de couleurs différentes donc :

$$\begin{aligned} P(Y_k = 5) &= P(B_1 \cap \overline{B2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} + \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} \\ &= \frac{6k}{(k+3)^2} \end{aligned}$$

4. On peut résumer la loi de probabilité du gain Y_k dans le tableau ci-dessous :

Valeurs de Y_k	-9	-1	5
$P(Y_k = y_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

5. L'espérance de Y_k est :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-(k-27)(k-3)}{(k+3)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $E(Y_k) > 0$ si, et seulement si, $k \in]3; 27[$.
Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, le nombre de boules noires k est strictement compris entre 3 et 27.

3 Autres exercices

BAC 2021 Centres étrangers - Sujet 1

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

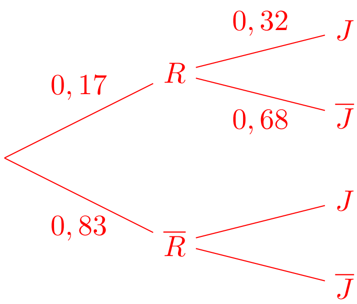
Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



On ne peut pas remplir l'arbre pondéré entièrement !
N'essayez pas de vouloir caser à tout prix les valeurs de l'énoncé dans l'arbre si ce ne sont pas les bonnes.

2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
$P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544 \approx 0,054$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
D'après l'énoncé, $P(J) = 0,11$.
$\{R; \overline{R}\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) &\iff P(\overline{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J) \\ &\iff P(\overline{R} \cap J) = 0,11 - 0,0544 \\ &\iff P(\overline{R} \cap J) = 0,0556 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est environ égale à $0,056$.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.
On cherche à calculer $P_{\overline{R}}(J)$.

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(J) &= \frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,0556}{0,83} \\ &\approx 0,067 \end{aligned}$$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est d'environ $6,7\%$.

Exercices supplémentaires

Les exercices suivants ont été donnés en colle en classe préparatoire. Leur niveau de difficulté est varié mais ils sont tout à fait accessibles en Première et en Terminale. La difficulté principale réside surtout dans le peu de questions intermédiaires pour vous guider.

Exercice supplémentaire n°1

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si cette personne est malade. Par contre, on obtient un faux positif pour $0,2\%$ des personnes saines.
Une personne a été testée positive, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice supplémentaire n°2

Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles non défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice supplémentaire n°3

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k, il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard puis, dans cette urne, on tire une boule au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé l'urne n sachant qu'on a tiré une boule blanche ?

Exercice supplémentaire n°4

Une boîte contient deux jetons : un noir et un rouge.
On tire n fois un jeton dans cette boîte en le remettant après avoir noté sa couleur.
On considère les événements :
A_n : « On obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »
B_n : « On obtient au plus un jeton noir »

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n=2$?
3. Même question si $n=3$.