Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 3

Soit u_n la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 & \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n \geqslant 2$$

- Initialisation :

$u_0 = 4 \geqslant 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k \geqslant 2$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 2$.

On a :

$$\begin{aligned} & u_k \geqslant 2 \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} \times u_k \geqslant \frac{1}{2} \times 2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} \times u_k + 1 \geqslant 1 + 1 \\ \Rightarrow \quad & u_{k+1} \geqslant 2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 1$

Or, d'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 2 \iff & -\frac{1}{2} \times u_n \leqslant -\frac{1}{2} \times 2 \qquad \text{car } -\frac{1}{2} < 0 \\ \iff & -\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant -1 + 1 \\ \iff & -\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

Exemple 9

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Par addition de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 + \dfrac{1}{n} = +\infty}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+1=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -7n+5=-\infty$.
Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1)(-7n+5)=-\infty}$

3. Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{4}{n}=3$
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2}=0^+$
Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}=+\infty}$

4. $u_n=n^3\left(\dfrac{n^3}{n^3}-\dfrac{n^2}{n^3}+\dfrac{3n}{n^3}-\dfrac{1}{n^3}\right)=n^3\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)$
Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}=1$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$.
Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-n^2+3n-1=+\infty}$

5. $u_n=\dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}=\dfrac{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-1+\dfrac{6}{n^2}\right)}=\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{-1+\dfrac{6}{n^2}}$
Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{6}{n^2}=-1$.
Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}=-2}$

6. $u_n=\dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{n\left(1-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^3}=1$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)=+\infty$.
Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}=1$, on en déduit par quotient de limites que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}=0}$

7. $u_n=n\sqrt{n}-n=n\left(\sqrt{n}-1\right)$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-1=+\infty$, on en déduit par produit de limites que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}-n=+\infty}$

8. $u_n=(-2n+3)\,\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}=\dfrac{-2n^2-6n+3n+9}{-n^2+n+6}=\dfrac{-2n^2-3n+9}{-n^2+n+6}=\dfrac{n^2\left(-2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{6}{n^2}\right)}=\dfrac{-2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}}{-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{6}{n^2}}$
Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}=-2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{6}{n^2}=-1$.
Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+3)\,\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}=-2}$

9. $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{n}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = 1}$

10. $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{-n^2+9}{2n^2+3n+1} = \dfrac{n^2\left(-1+\dfrac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{-1+\dfrac{9}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{9}{n^2} = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 2$

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)} = -\dfrac{1}{2}}$

11. $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{4n^2+4n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{n^2\left(4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n\left(4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 4$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$

Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\left(4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 0$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ donc, par addition de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{3}}$

12. $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1} = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

Par addition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 3$

Par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = -\dfrac{2}{3}$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n} = 0$ donc, par addition de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1} = -\dfrac{2}{3}}$

2 Exercices du manuel

Exercice 25 page 145

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
Par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}+n^2\right) = +\infty}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4} = 0$.
Par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\dfrac{1}{n^4}\right) = 3}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{4}{3} > 1$.
Par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.
Par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - n^3\right) = -\infty}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi^n = +\infty$ car $\pi > 1$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+\pi^n) = +\infty$.
Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\left(n+\pi^n\right)\right) = -\infty}$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{10}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{7}{10} < 1$.
Par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-4+\left(\dfrac{7}{10}\right)^n + n^5\right) = +\infty}$.

Exercice 26 page 145

1. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$r_n = n^2 - n = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty}$.

2. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$s_n = -n + \sqrt{n} = -n\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = -n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Ne pas oublier que $\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc, par produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty}$.

3. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$t_n = -(-\sqrt{n}+n^7) = \sqrt{n} - n^7 = -n^7\left(-\frac{1}{n^6\sqrt{n}}+1\right)$$

De la même façon, $\dfrac{\sqrt{n}}{n^7} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^6 \times n} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^6 \times \sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^6 \times \sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^6 = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^6\sqrt{n}) = +\infty$.

Ainsi, par quotient de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^6\sqrt{n}}\right) = 0$.

Par somme de limites, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{n^6\sqrt{n}} + 1\right) = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^7 = -\infty$ donc, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -\infty}$.

4. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = -(n^6 - n^3) = -n^6 + n^3 = -n^6\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^3} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^3} = 1$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^6 = -\infty$ donc, par produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.

5. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = n^5 - n^3 + n = n^5\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^4} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}\right) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$ donc, par produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$.

6. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \geqslant 1$,

$$w_n = n^6 - n^4 + n^2 - n = n^6\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^4} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^5} = 0$ donc, par somme de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^4} - \dfrac{1}{n^5}\right) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^6 = +\infty$ donc, par produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty}$.

Exercice 27 page 145

1. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^5 + 4) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - 3) = +\infty$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (n^5 + 4)(n - 3) = +\infty}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{185}{192}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{185}{192} < 1$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times \left(\dfrac{185}{192}\right)^n = 0}$.

3. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (8n - 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (8n - 2)\left(3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{144}{121}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{144}{121} > 1$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times \left(\dfrac{144}{121}\right)^n = -\infty}$.

5. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (6 - n^4) = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^3} + 7\right) = 7$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (6 - n^4)\left(\dfrac{1}{n^3} + 7\right) = -\infty}$.

6. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - n^7) = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^9 + 1) = +\infty$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - n^7)(n^9 + 1) = -\infty}$.

Exercice 30 page 145

1. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 4) = +\infty$.

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n^2 - 4} = 0}$.

2. Par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) = 4$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3}{4 + \dfrac{1}{n}} = +\infty}$.

3. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^3} - 6\right) = -6$.

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^3} - 6} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{4}{3} > 1$.

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n} = 0}$.

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0^+$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$ donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n} = -\infty}$.

Ne surtout pas oublier de préciser le 0^+ !
Si cela avait été 0^-, la limite globale aurait été $+\infty$ par la règle des signes.
C'est un oubli classique qui vous vaudra un magnifique « **BLUFF !** » sur votre copie.

6. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{5}{7} < 1$.

Par somme de limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} - 9\right) = -9$.

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\dfrac{1}{n^2} - 9} = 0}$.

Exercice 89 page 207

1. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times (x+1) - (2x+1) \times 1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x-1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de f' puis les variations de la fonction f sur $[1;2]$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

2. f est croissante sur $[1;2]$ avec $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f(1) = \dfrac{5}{2}$.
Par conséquent, pour tout $x \in [1;2]$, on a $f(x) \in [1;2]$.

3.

4. En calculant les premiers termes de la suites (u_n), on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n) \ : \ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$
- **<u>Initialisation :</u>**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1,5$ et $u_1 = f(u_0) = 1,6$.
Par conséquent, $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ donc $P(0)$ est vraie.
- **<u>Hérédité :</u>**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$.
On a :

$$\begin{array}{lll} & 1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow & f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1) & \text{car la fonction } f \text{ est croissante sur } [1;2] \\ \Rightarrow & 1 \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \dfrac{5}{3} \leqslant 2 & \text{car } f(1) = \dfrac{3}{2} \text{ et } f(2) = \dfrac{5}{3} \end{array}$$

Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **<u>Conclusion :</u>**
Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant un + 1 \leqslant 2$.

En conclusion, la suite (u_n) est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente. Il faudra attendre le chapitre 5 pour réussir à prouver que sa limite est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 92 page 153

1. **(a)** Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) = \frac{5}{12}w_n$$

Par conséquent, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$w_n = w_0 \times q^n$$
$$w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$$

2. **(a)** Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{-u_n + v_n}{3} = \frac{w_n}{3}$$

Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times q^n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$, on en déduit que $w_n \geqslant 0$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$, alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
Par conséquent, la suite (v_n) est décroissante.

(b) Comme la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$, c'est-à-dire $v_n \leqslant 10$. Or, pour tout entier naturel n, on a $w_n \geqslant 0$ c'est-à-dire $v_n - u_n \geqslant 0$ d'où $v_n \geqslant u_n$. On a donc $u_n \leqslant v_n \leqslant 10$ c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$.

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$ c'est-à-dire $u_n \geqslant 2$. Or, pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant u_n$ d'où $v_n \geqslant u_n \geqslant 2$ c'est-à-dire $v_n \geqslant 2$.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10 donc elle converge vers un réel ℓ.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ'.

3. Pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - u_n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' - \ell$.
Or, comme $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{12}\right)^n = 0$ et donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
On en déduit alors que $\ell' - \ell = 0$ c'est-à-dire $\ell = \ell'$.

4. **(a)** Pour tout entier naturel n, on a :

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 4v_n = t_n$$

On en déduit que la suite (t_n) est constante égale à $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 6 + 40 = 46$.

(b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 46$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 3\ell + 4\ell = 7\ell$ par opérations sur les limites, d'où $7\ell = 46 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{46}{7}$.