Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.
g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 \times 1 + 0$$
$$g'(x) = 3x^2 + 9x - 12$$

Commençons par résoudre l'équation $3x^2 + 9x - 12 = 0$.
On aurait pu simplifier un peu l'équation car $3x^2 + 9x - 12 = 0 \iff x^2 + 3x - 4 = 0$
$a = 3,\ b = 9,\ c = -12$ $\qquad$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$$

De plus $a = 3 > 0$ donc la fonction g' est positive à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de signes de la fonction g' puis les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	61	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	

$g\,(1) = 1^3 + \dfrac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\dfrac{3}{2}$
$g\,(-4) = (-4)^3 + \dfrac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = -\dfrac{3}{2} = -64 + 72 + 48 + 5 = 61$

2 Exercices du manuel

Exercice 6 page 210

1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 + 6x - 24) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8)$$

Commençons par résoudre l'équation :

$$\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8) = 0 \iff x^2 + 2x - 8 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = -4$$

De plus $a = 1 > 0$ donc la fonction f' est positive à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de signes de la fonction f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{29}{3}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	

2.

$$f(-1) = \frac{1}{9}\left((-1)^3 + 3 \times (-1)^2 - 24 \times (-1) + 7\right) = \frac{11}{3}$$
$$f'(-1) = \frac{1}{3}((-1)^2 + 2 \times (-1) - 8) = -3$$

Ainsi, une équation de $\mathcal{T}$ est de la forme :

$$y = f'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1)$$
$$y = -3(x + 1) + \frac{11}{3}$$
$$y = -3x + \frac{2}{3}$$

3. La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$ soit aux points d'abscisses -4 et 2.

4. (a) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

Commençons par résoudre l'équation $3x^2 + 6x + 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times 3} = -1$$

De plus $a = 3 > 0$ donc la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}$.
On en déduit le tableau de signes de la fonction g' puis les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Enfin, en remarque que $g(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1 = 0$.
On en déduit donc que la fonction g est négative sur $]-\infty; -1[$ et positive sur $]-1; +\infty[$.

Les plus malins auront reconnu une identité remarquable.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^3$ et l'étude du signe est alors encore plus rapide.

(b) On étudie le signe de :

$$\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 - 24x + 7\right) - \left(-3x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = \frac{1}{9}g(x)$$

D'après la question précédente, on sait que :

- $\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 - 24x + 7\right) - \left(-3x + \frac{2}{3}\right)$ est négatif sur $]-\infty; -1[$.
  On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty; -1[$.
- $\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 - 24x + 7\right) - \left(-3x + \frac{2}{3}\right)$ est positif sur $]-1; +\infty[$.
  On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $]-1; +\infty[$.

61 page 226

1. - Soit g la fonction définie sur $]-1; 1[$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.
  g est dérivable sur $]-1; 1[$ et pour tout $x \in]-1; 1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (1+x) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

- $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = u(x) \times v(x)$ avec

$u(x) = x$ $\qquad$ $u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \times \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)}}$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= 1 \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + x \times \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)}} \\
&= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{(1-x)^2 \times (1+x)}}{\sqrt{(1-x)^2 \times (1+x)}} + \frac{x}{\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)}} \qquad \textit{mise au même dénominateur} \\
&= \frac{(1+x)(1-x) + x}{\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)}}}$$

2.
- Pour tout $x \in]-1;1[$, $\sqrt{(1-x)^3 \times (1+x)} > 0$.
- $x \mapsto -x^2 + x + 1$ est une fonction du second degré.

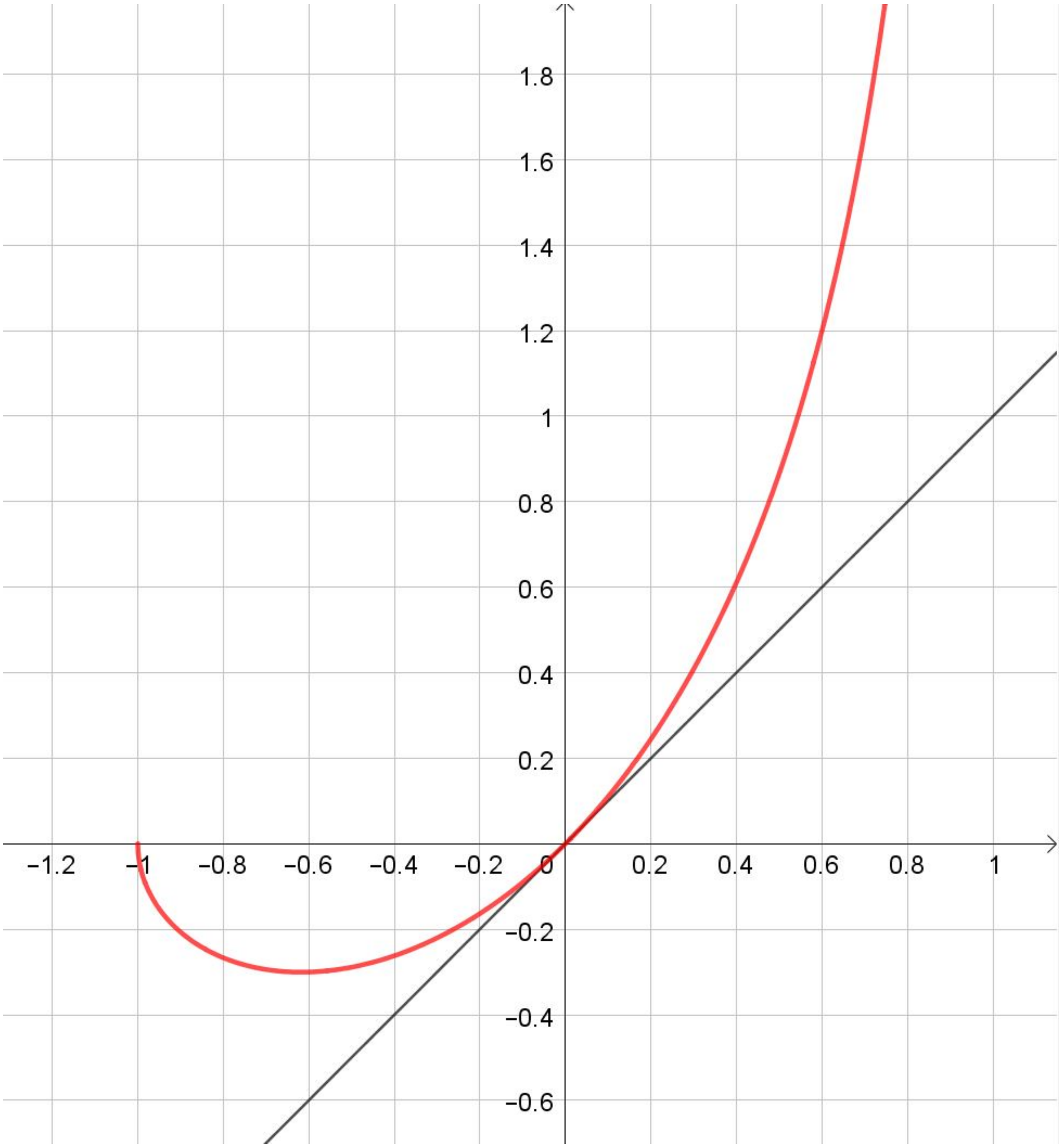
  Après calculs, on trouve que cette fonction s'annule en $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \notin]-1;1[$ et en $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  De plus, comme $a = -1 < 0$, cette fonction est négative à l'extérieur des racines.

3. On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $]-1;1[$ puis le tableau de variations de f sur $[-1;1[$:

x	-1		$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$

4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$$
$$\boxed{y = x}$$



64 page 226

1. p est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $p(t) = 100 \times u(t) \times v(t)$ avec $u(t) = t^2 + 20t$ $u'(t) = 2t + 20$; $v(t) = e^{-t-1}$ $v'(t) = -e^{-t-1}$

On a donc, pour tout $t \in [0;+\infty[$,

$$p'(t) = 100\left(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\right)$$
$$p'(t) = 100\left((2t+20) \times e^{-t-1} + (t^2+20t) \times (-e^{-t-1})\right)$$
$$p'(t) = 100e^{-t-1}\left(2t + 20 - (t^2+20t)\right)$$
$$\boxed{p'(t) = 100e^{-t-1}(-t^2 - 18t + 20)}$$

2. Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $100\mathrm{e}^{-t-1} > 0$ donc $p'(t)$ est du signe de $-t^2 - 18t + 20$.
Commençons par résoudre l'équation $-t^2 - 18t + 20 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 404$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-18)+\sqrt{404}}{2 \times (-1)} = -9 - \sqrt{101} \approx -19,05$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-18)-\sqrt{404}}{2 \times (-1)} = -9 + \sqrt{101} \approx 1,05$$

De plus $a = -1 > 0$ donc la fonction p' est négative à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de signes de la fonction p' puis les variations de la fonction p sur $[0; +\infty[$:

t	0		$-9+\sqrt{101}$		$+\infty$
$p'(t)$		$+$	0	$-$	
$p(t)$	0	$\nearrow$	≈ 285	$\searrow$	0

3. Le nombre maximal de malades est d'environ 285 au bout d'un peu plus d'une semaine.

92 page 231

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $g'(x) = 1 - e^x$.
Or, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^x \geqslant 1$ donc $1 - e^x \leqslant 0$.

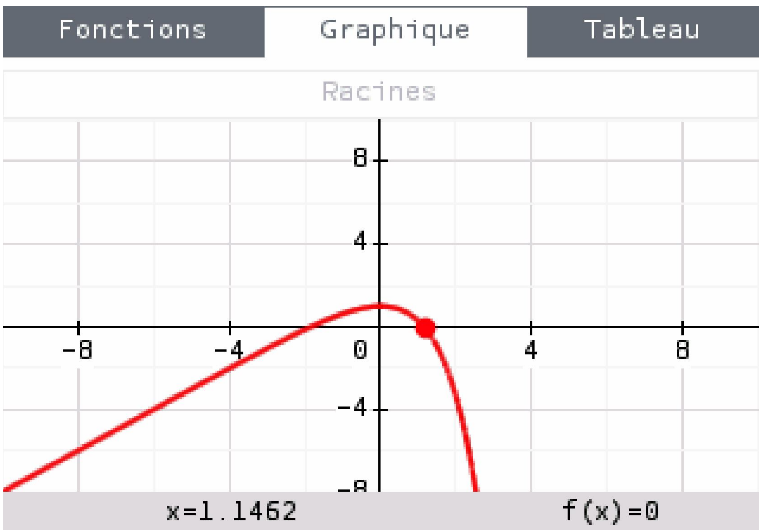
On peut donc en déduire le signe de la fonction g' puis les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	

Toujours penser à tracer la courbe représentative de g à la calculatrice pour vérifier nos résultats.

2. On trace la courbe représentative de la fonction g à la calculatrice.
On utilise ensuite la touche **Boîte à outils**, puis **Calculer**, **Antécédent** et enfin **y=0**, la calculatrice nous renvoie une valeur approchée de α.
On en déduit un encadrement à 10^{-3} près de α :

$$\boxed{1,146 < \alpha < 1,147}$$



Ne pas confondre un encadrement $(1,146 < \alpha < 1,147)$ *et une valeur approchée* $(\alpha \approx 1,146)$.

3. D'après ce qui précède la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$ et s'annule en $x=\alpha$. Par conséquent,

- $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;\alpha]$.
- $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$.

On aurait aussi pu résumer ça dans un tableau.
Il faut bien utiliser α qui est la valeur exacte, et pas une valeur approchée.

PARTIE B : Étude de la fonction f

1. (a) Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $xe^x+1>0$.
Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ **dont le dénominateur ne s'annule pas sur** $[0;+\infty[$.

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=e^x-1$, $v(x)=xe^x+1$; $u'(x)=e^x$, $v'(x)=1\times e^x+x\times e^x=(x+1)e^x$

On a donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\
&= \frac{e^x\times(xe^x+1)-(e^x-1)(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}\\
&= \frac{e^x\left(xe^x+1-(e^x-1)(x+1)\right)}{(xe^x+1)^2}\\
&= \frac{e^x\left(xe^x+1-xe^x-e^x+x+1\right)}{(xe^x+1)^2}\\
&= \frac{e^x\left(x+2-e^x\right)}{(xe^x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}}$$

(b) Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{e^x}{(xe^x+1)^2}>0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur cet intervalle.

A l'aide des résultats de la question **3.** de la **Partie A**, on peut donc en déduire le signe de la fonction f' puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. (a) $g(\alpha)=0$ donc $\alpha+2-e^\alpha=0$. Autrement dit, $e^\alpha=\alpha+2$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{e^\alpha-1}{\alpha\times e^\alpha+1}\\
&= \frac{(\alpha+2)-1}{\alpha\times(\alpha+2)+1}\\
&= \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}\\
&= \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}}$$

Il est souvent plus facile de prouver que $f(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha+1} = 0$ que de montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

(b) D'après la question **2.** de la **Partie A**,

$$\begin{aligned}
1,146 < \alpha < 1,147 &\Rightarrow 1,146 + 1 < \alpha + 1 < 1,147 + 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2,146} > \frac{1}{\alpha+1} > \frac{1}{2,147} \\
&\Rightarrow \boxed{0,4660 > f(\alpha) > 0,4657}
\end{aligned}$$

La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc, lorsqu'on applique la fonction inverse aux trois termes de l'inégalité, on n'oublie pas changer le sens de l'inégalité.

3. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{e^0\left(0 + 2 - e^0\right)}{(0 \times e^0 + 1)^2} = 1$

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 est donc :

$$\begin{gathered}
y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) \\
\boxed{y = x}
\end{gathered}$$

4. (a) Pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\
&= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - \frac{x \times (xe^x + 1)}{xe^x + 1} \\
&= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1} &= \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \\
&= \frac{xe^x - x^2e^x - x + e^x - xe^x - 1}{xe^x + 1} \\
&= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'égalité de l'énoncé.

On aurait pu factoriser intelligemment dans le premier calcul pour directement arriver au résultat. En l'absence d'inspiration, on peut tout à fait partir du résultat et développer pour se rapprocher de ce que l'on a.

(b) u est une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.
Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $u'(x) = e^x - (1 \times e^x + x \times e^x) - 0 = -xe^x$.
Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $-xe^x \leqslant 0$ donc la fonction u est décroissante sur cet intervalle.

(c) $u(0) = e^0 - 0 \times e^0 - 1 = 0$ et u est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,+\infty[,\ u(x) \leqslant 0}$$

(d) Pour tout $x \in [0;+\infty[$,

- $x + 1 > 0$
- $u(x) \leqslant 0$
- $xe^x + 1 > 0$

Par conséquent, $f(x) - x = \dfrac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1} \leqslant 0$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.
On en déduit que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0;+\infty[$ et donc que $\boxed{\text{la tangente } T \text{ est au-dessus de la courbe } \mathscr{C}_f}$

97 page 234

Partie A : Conjectures

1. On peut conjecturer que la fonction f est croissante sur $[-4; 2]$.
2. On peut conjecturer que la fonction f est négative sur $[-4; 0]$ puis positive sur $[0; 2]$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = u(x) \times v(x) - 1$ avec $u(x) = x + 2$, $v(x) = e^{x-1}$; $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{x-1}$

   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0$$
$$g'(x) = 1 \times e^{x-1} + (x+2)e^{x-1}$$
$$\boxed{g'(x) = e^{x-1}(x+3)}$$

2. Pour tout $x \in [-4; 2]$, $e^{x-1} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $x + 3$.
   De plus, $x + 3 > 0 \iff x > -3$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } g' \text{ est négative sur } [-4; -3] \text{ et positive sur } [-3; 2]}$.
3. On obtient ainsi le tableau de variations de la fonction g :

x	-4		-3		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-2e^{-5} - 1$	$\searrow$	$-e^{-4} - 1$	$\nearrow$	$4e - 1$

   $g(-4) = (-4+2)e^{-4-1} - 1 = -2e^{-5} - 1$
   $g(-3) = (-3+2)e^{-3-1} - 1 = -e^{-4} - 1$
   $g(2) = (2+2)e^{2-1} - 1 = 4e - 1$
4. On a $-3 < \alpha < 2$. En reprenant notre étude on obtient le tableau de variations suivant :

x	-4		-3		α		2
$g(x)$	$-2e^{-5} - 1$	$\searrow$	$-e^{-4} - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4e - 1$

   L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α.
   Ainsi, à l'aide du tableau de variation précédent, on peut en déduire le tableau de signes de la fonction g sur $[-4; 2]$:

x	-4		α		2
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie C : Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x) \times v(x) - \dfrac{x^2}{2}$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^{x-1} & v'(x) = e^{x-1} \end{array}$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x \times e^{x-1} + x^2 \times e^{x-1} - \frac{2x}{2}$$
$$f'(x) = e^{x-1}(x^2 + 2x) - x$$
$$f'(x) = e^{x-1}x(x+2) - x$$
$$\boxed{f'(x) = x\left(e^{x-1}(x+2) - 1\right)}$$

2. Ainsi, pour tout réel x, on a $\boxed{f'(x) = x \times g(x)}$.

3. On en déduit le tableau de signes ci-dessous :

x	-4		0		α		2
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On peut alors en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-4; 2]$:

x	-4		0		α		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$16e^{-5} - 8$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$4e - 2$

5. On s'est plantés dans nos conjectures, ça arrive !

Le tableau de variations précédent contredit les conjectures de la partie A.

f n'est pas croissante sur $[-4; 2]$ puisqu'elle est décroissante sur $[0; \alpha]$, et f n'est pas positive sur $[0; 2]$ puisqu'elle est négative au moins sur $[0; \alpha]$.

Exercice 98 page 235

PARTIE A

1. $\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnée $(0; 0)$ donc son ordonnée à l'origine vaut 0.

De plus, son coefficient directeur vaut $\dfrac{1-0}{0,5-0} = \dfrac{1}{0,5} = 2$.

Ainsi, une équation de $\mathcal{D}$ est $y = 2x$.

2. Comme la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est horizontale, on a $f'(1) = 0$.

3. f semble concave sur sur $[0; 1,75]$.

PARTIE B

1. La fonction f est dérivable sur $[0;3]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;3]$.

Pour tout $x \in [0;3]$, $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v(x) = e^{-0,5x^2} & v'(x) = -0,5 \times 2xe^{-0,5x^2} = -xe^{-0,5x^2} \end{array}$

On a donc, pour tout $x \in [0;3]$,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$f'(x) = 2 \times e^{-0,5x^2} + 2x \times \left(-xe^{-0,5x^2}\right)$$
$$\boxed{f'(x) = e^{-0,5x^2}(2 - 2x^2)}$$

2. Pour tout réel $x \in [0;3]$, $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2 - 2x^2$.
De plus,

$$2 - 2x^2 = 0 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = -1$$

De plus, $a = -2 < 0$ donc $x \mapsto 2 - 2x^2$ est négative à l'extérieur des racines.
On en déduit le signe de f' puis les variations de f sur $[0;3]$.

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-0,5}$	$\searrow$	$6e^{-4,5}$

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $[0;3]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;3]$.

Pour tout $x \in [0;3]$, $f'(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = 2 - 2x^2 & u'(x) = -4x \\ v(x) = e^{-0,5x^2} & v'(x) = -xe^{-0,5x^2} \end{array}$

On a donc, pour tout $x \in [0;3]$,

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$f''(x) = -4x \times e^{-0,5x^2} + (2 - 2x^2) \times \left(-xe^{-0,5x^2}\right)$$
$$f''(x) = e^{-0,5x^2}\left(-4x + (2 - 2x^2) \times (-x)\right)$$
$$f''(x) = e^{-0,5x^2}\left(2x^3 - 6x\right)$$
$$\boxed{f''(x) = e^{-0,5x^2}2x\left(x^2 - 3\right)}$$

Or, pour tout réel $x \in [0;3]$, on a $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$ et $2x \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x^2 - 3$.
De plus,

$$x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

De plus, $a = 1 > 0$ donc $x \mapsto x^2 - 3$ est positive à l'extérieur des racines.
On en déduit le signe de f'' puis la convexité de f sur $[0;3]$.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		concave		convexe	

PARTIE C

La fonction f admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $2\mathrm{e}^{-0,5} \approx 1,21$.
Ainsi, lors du pic de la maladie, le nombre de lits occupés est d'environ 1,21 millions.
Cette affirmation est donc correcte.

3 Autres exercices

Étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2-x+2}$.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1-3x$ $\quad u'(x) = -3$

$v(x) = x^2 - x + 2$ $\quad v'(x) = 2x-1$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-3 \times (x^2-x+2) - (1-3x)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2} \\ &= \frac{-3x^2+3x-6-2x+1+6x^2-3x}{(x^2-x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2-2x-5}{(x^2-x+2)^2}}$$

Il peut arriver qu'on fasse des erreurs de calcul.
Comprendre les étapes de l'exercice peut permettre de vérifier certains résultats. Ici, on dérive une fonction, fort probablement pour ensuite étudier le signe de la dérivée. Le fait de retrouver l'étude du signe du numérateur dans la question suivante est un signe qu'on a sûrement bon !

2. (a) Étudier le signe du polynôme du second degré défini pour tout réel x par $g(x) = 3x^2 - 2x - 5$.

Commençons par résoudre l'équation $3x^2 - 3x - 5 = 0$.
$a = 3$, $b = -2$, $c = -5$ donc $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 64$
$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+\sqrt{64}}{2 \times 3} = \dfrac{5}{3}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)-\sqrt{64}}{2 \times 3} = -1$

De plus, $a = 3 > 0$ donc la fonction g est positive à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) En déduire le signe de $f'(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^2-x-2)^2}$.
Comme $(x^2-x-2)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

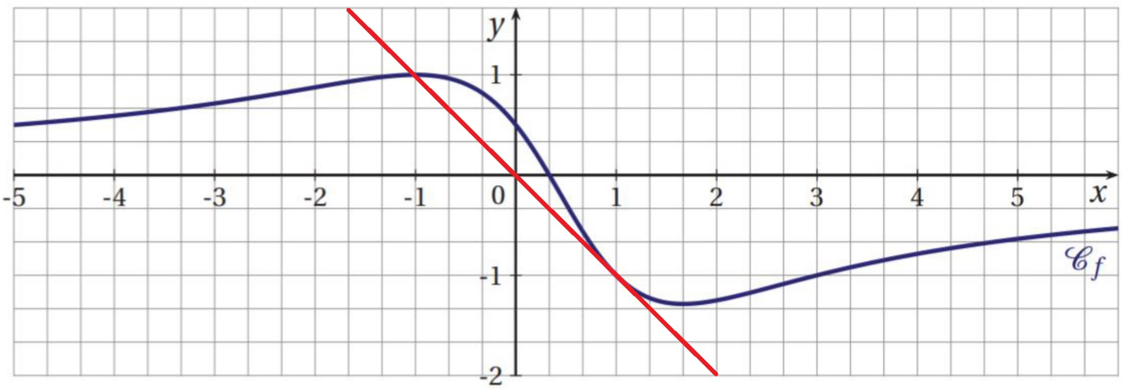
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
(Indiquer dans le tableau de variations les valeurs exactes des extremum).
On peut donc en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{9}{7}$	$\nearrow$	

Après calculs, $\quad f(-1) = 1 \qquad f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{9}{7}$

Encore une fois, comme la courbe représentative de la fonction est donnée dans la question suivante, on peut la comparer avec notre tableau de variations pour vérifier si nos résultats sont cohérents.
Autrement, tracer la courbe représentative de f à la calculatrice est toujours une bonne idée.

4. La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.

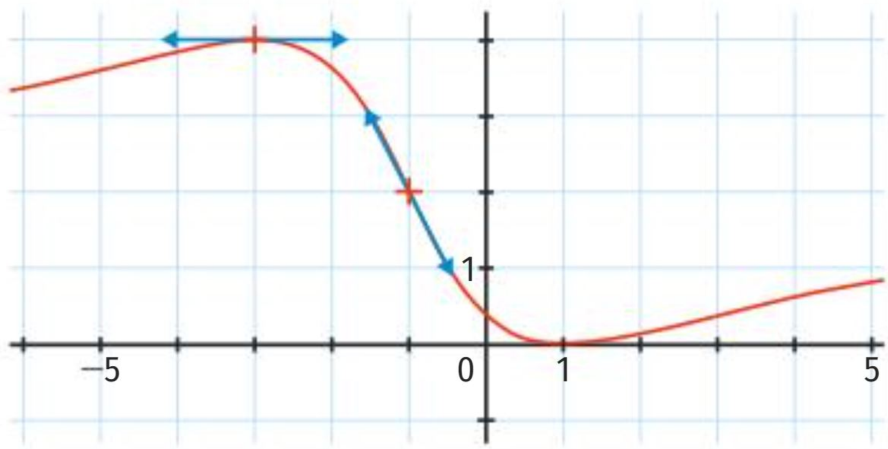


Donner une équation de la tangente d à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
$f(1) = -1$ et $f'(1) = -1$.
Une équation de la tangente d à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$$
$$y = -1 \times (x-1) + (-1)$$
$$\boxed{y = -x}$$

89 page 152 (Manuel de Première)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



(a)

1. Déterminer graphiquement, en justifiant :

(a) $f(-3)$ et $f'(-3)$ puis $f(-1)$ et $f'(-1)$.
$f(-3) = 4$ et $f(-1) = 2$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3 est horizontale donc $f'(-3) = 0$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 a pour coefficient directeur -2 donc $f'(-1) = -2$.

(b) le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-6; 5]$.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-6; -3]$ donc, pour tout $x \in [-6; -3]$, $f'(x) \geqslant 0$.
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-3; 1]$ donc, pour tout $x \in [-3; 1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[1; 5]$ donc, pour tout $x \in [1; 5]$, $f'(x) \geqslant 0$.

Soit a et b deux réels. On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{2(x^2 + ax + b)}{x^2 + 2x + 5}$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ et justifier alors l'ensemble de définition de f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+1)^2 + 4 = x^2 + 2x + 1 + 4 = x^2 + 2x + 5$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 5 > 0$ donc le dénominateur de la fonction f ne s'annule jamais.
En conclusion, f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.

3. On sait que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A\left(0; \dfrac{2}{5}\right)$.
Montrer que $b = 1$.

$$\begin{aligned}
A\left(0; \frac{2}{5}\right) \in \mathscr{C} &\iff f(0) = \frac{2}{5} \\
&\iff \frac{2 \times (0^2 + a \times 0 + b)}{0^2 + 2 \times 0 + 5} = \frac{2}{5} \\
&\iff \frac{2b}{5} = \frac{2}{5} \\
&\iff \boxed{b = 1}
\end{aligned}$$

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(4-2a)x^2 + 16x + 10a - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$$

On vient de démontrer que $b = 1$ donc on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2(x^2 + ax + 1)}{x^2 + 2x + 5}$$

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = 2(x^2 + ax + 1) & u'(x) = 4x + 2a \\ v(x) = x^2 + 2x + 5 & v'(x) = 2x + 2 \end{array}$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{(4x + 2a) \times (x^2 + 2x + 5) - 2(x^2 + ax + 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} \\
&= \frac{4x^3 + 8x^2 + 20x + 2ax^2 + 4ax + 10a - 4x^3 - 4x^2 - 4ax^2 - 4ax - 4x - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 2ax^2 + 16x + 10a - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(4-2a)x^2 + 16x + 10a - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}}$$

5. On sait que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse -3 une tangente horizontale. Démontrer que $a = -2$.
Autrement dit, cela signifie que $f'(-3) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(-3) = 0 &\iff \frac{(4-2a)\times(-3)^2 + 16\times(-3) + 10a - 4}{((-3)^2 + 2\times(-3)+5)^2} = 0 \\ &\iff \frac{36 - 18a - 48 + 10a - 4}{64} = 0 \\ &\iff \frac{-8a - 16}{64} = 0 \\ &\iff \boxed{a = -2} \end{aligned}$$

6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{8(x+3)(x-1)}{(x^2+2x+5)^2}$$

On vient de démontrer que $a = -2$ donc on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4 - 2\times(-2))x^2 + 16x + 10\times(-2) - 4}{(x^2+2x+5)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 16x - 24}{(x^2+2x+5)^2} \end{aligned}$$

De plus, comme $8(x+3)(x-1) = 8(x^2 + 3x - x - 3) = 8x^2 + 16x - 24$, on a bien :

$$\boxed{f'(x) = \frac{8(x+3)(x-1)}{(x^2+2x+5)^2}}$$

7. En déduire alors le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{8}{(x^2+2x+5)^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+3)(x-1)$.
On peut alors en déduire le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Après calculs, $f(-3) = 4$ $f(1) = 0$

Et maintenant, on peut se féliciter d'avoir trouvé un tableau de variations qui correspond à la représentation graphique donnée au début de l'exercice !

Exercice 8 - 1S révisions dérivation annales2maths.com

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+6x+9}$, où a et b sont des réels donnés.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
$x^2+6x+9=(x+3)^2$ donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

2. Déterminer a et b pour que la représentation graphique de f passe par $A\left(2;\dfrac{6}{5}\right)$ et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
Autrement dit, la fonction f doit vérifier $f(2)=\dfrac{6}{5}$ et $f'(2)=0$.

$$\begin{aligned}
A\left(2;\frac{6}{5}\right)\in\mathscr{C} &\iff f(2)=\frac{6}{5}\\
&\iff \frac{2\times 2^2+a\times 2+b}{2^2+6\times 2+9}=\frac{6}{5}\\
&\iff \frac{8+2a+b}{25}=\frac{6}{5}\\
&\iff \boxed{2a+b=22}
\end{aligned}$$

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{(4x+a)\times(x^2+6x+9)-(2x+6)\times(2x^2+ax+b)}{(x^2+6x+9)^2}\\
&=\frac{4x^3+24x^2+36x+ax^2+6ax+9a-\left(2x^3+2ax^2+2bx+12x^2+6ax+6b\right)}{(x^2+6x+9)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(12-a)x^2+(36-2b)x+9a-6b}{(x^2+6x+9)^2}}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
f'(2)=0 &\iff \frac{(12-a)\times 2^2+(36-2b)\times 2+9a-6b}{(2^2+6\times 2+9)^2}=0\\
&\iff \frac{48-4a+72-4b+9a-6b}{25^2}\\
&\iff \frac{5a-10b+120}{25^2}=0\\
&\iff \boxed{5a-10b+120=0}
\end{aligned}$$

Enfin, il nous reste à résoudre un système pour déterminer les valeurs de a et b :

$$\begin{aligned}
\begin{cases}2a+b=22\\5a-10b+120=0\end{cases} &\iff \begin{cases}b=22-2a\\5a-10(22-2a)+120=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b=22-2a\\5a-220+20a+120=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=4\\b=22-2\times 4\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=4\\b=14\end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{f(x)=\frac{2x^2+4x+14}{x^2+6x+9}} \qquad \text{et} \qquad f'(x)=\frac{8x^2+8x-48}{(x^2+6x+9)^2}$$

3. On suppose que $a=4$ et $b=14$.

(a) Étudier les variations de f et construire la représentation graphique de f.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{8x^2 + 8x - 48}{(x^2 + 6x + 9)^2}$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $(x^2 + 6x + 9) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $8x^2 + 8x - 48$.

On résout l'équation $8x^2 + 8x - 48 = 0$.

$\Delta = 8^2 - 4 \times 8 \times (-48) = 1600$

$\Delta > 0$ donc l'équation $8x^2 + 8x - 48 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 + \sqrt{1600}}{2 \times 8} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 - \sqrt{1600}}{2 \times 8} = -3$

Comme $a = 8 > 0$, la fonction $x \mapsto 8x^2 + 8x - 48$ est positive à l'extérieur des racines.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$8x^2 + 8x - 48$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\dfrac{6}{5}$	$\nearrow$	

(b) En utilisant le graphique, déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation

$$x^2(2 - m) + 2x(2 - 3m) + 14 - 9m = 0$$