

## Table des matières

<b>1 Exemples du cours</b>	<b>2</b>
Exemple 11 . . . . .	2
Exemple 14 . . . . .	2
<b>2 Exercices du manuel</b>	<b>7</b>
4 page 310 . . . . .	7
5 page 310 . . . . .	7
6 page 310 . . . . .	7
7 page 310 . . . . .	8
27 page 326 . . . . .	8
30 page 326 . . . . .	9
60 page 329 . . . . .	9
61 page 329 . . . . .	10
62 page 329 . . . . .	10
66 page 330 . . . . .	11
73 page 330 . . . . .	12
76 page 331 . . . . .	12
78 page 331 . . . . .	12
103 page 334 . . . . .	13
107 page 335 . . . . .	13
5 page 340 . . . . .	14
<b>3 Autres exercices</b>	<b>17</b>
Entraînement - Exercice 1 . . . . .	17
Entraînement - Exercice 2 . . . . .	17
Entraînement - Exercice 3 . . . . .	17
Entraînement - Exercice 4 . . . . .	18
Entraînement - Exercice 5 . . . . .	19

# 1 Exemples du cours

## Exemple 11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 8]$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 8]$  et, pour tout  $x \in [0; 8]$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Pour tout  $x \in [0; 8]$ ,  $f'(x) < 0$  donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; 8]$ .

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0; 8]$  :

$x$	0	8
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	$\frac{1}{9}$

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 8]$ ,  $\frac{1}{9} \leq f(x) \leq 1$  donc, par croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^8 \frac{1}{9} dx \leq \int_0^8 f(x) dx \leq \int_0^8 1 dx &\iff \frac{1}{9} \times (8-0) \leq \int_0^8 f(x) dx \leq 1 \times (8-0) \\ &\iff \frac{8}{9} \leq \int_0^8 f(x) dx \leq 8 \end{aligned}$$



Cet exercice n'a que peu d'intérêt car on peut trouver facilement une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  sur l'intervalle  $[0; 8]$  et donc en déduire la valeur de l'intégrale, sans avoir à l'encadrer.

$$\int_0^8 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^8 = \ln(9)$$

## Exemple 14

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

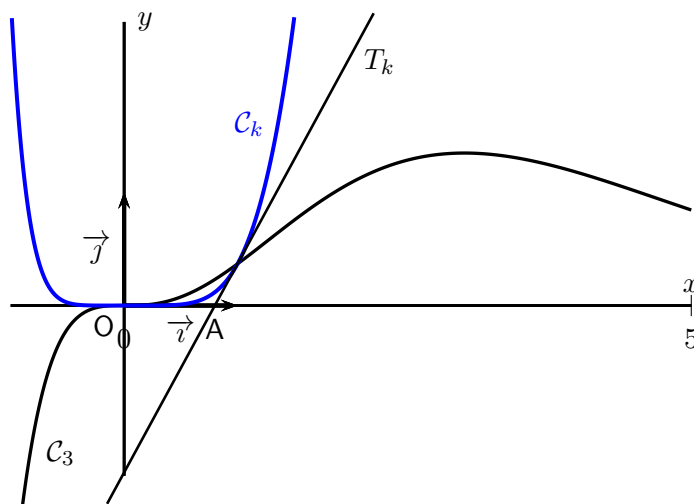
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_n$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

### PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe  $\mathcal{C}_k$  où  $k$  est un entier naturel non nul, sa tangente  $T_k$  au point d'abscisse 1 et la courbe  $\mathcal{C}_3$ .

La droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées  $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$ .



1. (a) Déterminer les limites de la fonction  $f_1$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = xe^{-x}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  donc, par composition de limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  donc, par produit de limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ .

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ .

Finalement, comme  $f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ .

- (b) Étudier les variations de la fonction  $f_1$  et dresser le tableau de variations de  $f_1$ .

La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  donc  $f_1'(x)$  est du même signe que  $1-x$ .

De plus,

$$1-x > 0 \iff x < 1$$

$$1-x < 0 \iff x > 1$$

$$1-x = 0 \iff x = 1$$

On en déduit alors le signe de la fonction  $f_1'$  et les variations de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	$0$

$$f_1(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- (c) A l'aide du graphique, justifier que  $k$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Tout d'abord, nous savons que  $k \in \mathbb{N}^*$ , il suffit donc de démontrer que  $k \neq 1$ .

D'après la question 1.(a),  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ , ce qui n'est pas le cas pour la fonction  $f_k$  d'après le graphique,

donc  $k \neq 1$ . En conclusion,  $k \geq 2$ .

2. (a) Démontrer que pour  $n \geq 1$ , toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$  passent par le point  $O$  et un autre point dont on donnera les coordonnées.

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$  et  $f_n(1) = 1^n e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Par conséquent, toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$  passent par l'origine et le point de coordonnées  $(1; \frac{1}{e})$ .

- (b) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, et pour tout réel  $x$ ,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})$$

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

3. Sur le graphique, la fonction  $f_3$  semble admettre un maximum atteint pour  $x = 3$ .

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

D'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 e^{-x} \geq 0$  donc  $f'_3(x)$  est du même signe que  $3 - x$ .  
De plus,

$$3 - x > 0 \iff x < 3$$

$$3 - x < 0 \iff x > 3$$

$$3 - x = 0 \iff x = 3$$

On en déduit alors le signe de la fonction  $f'_3$  et les variations de la fonction  $f_3$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f'_3(x)$		$0$	
$f_3(x)$			

La fonction  $f_3$  admet bien un maximum en  $x = 3$ .

4. (a) Démontrer que la droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées  $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$ .  
 $T_k$  est la tangente à  $\mathcal{C}_k$  au point d'abscisse 1. L'équation réduite de la droite  $T_k$  est donc :

$$y = f'_k(1)(x - 1) + f_k(1)$$

De plus,  $f_k(1) = \frac{1}{e}$  et  $f'_k(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = \frac{k-1}{e}$ .

On obtient alors :

$$y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

$$y = \frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e}$$

Enfin, on trouve que  $y = 0$  lorsque :

$$0 = \frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e} \iff 0 = (k-1)x + 2 - k \iff x = \frac{k-2}{k-1}$$

En conclusion, la droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées  $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$ .

- (b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier  $k$ .

D'après l'énoncé, la droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point  $A$  de coordonnées  $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$ .

On résout donc l'équation :

$$\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \iff 5(k-2) = 4(k-1) \iff k = 6$$

## PARTIE B

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Calculer  $I_1$ .

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[0; 1]$  par  $u'(x) = e^{-x}$  et  $v(x) = x$ .

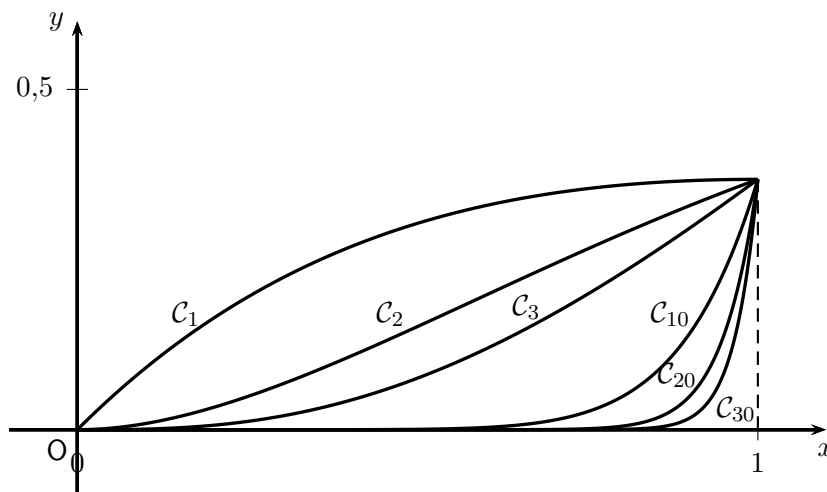
Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on peut poser  $u(x) = -e^{-x}$  et  $v'(x) = 1$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0; 1]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[0; 1]$ .  
Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 x e^{-x} dx \\
 &= \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\
 &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx \\
 &= [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\
 &= -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\
 \boxed{I_1} &= 1 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$  comprises dans la bande définie par  $0 \leq x \leq 1$ .



- (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  en décrivant sa démarche.  
Sur  $[0; 1]$ ,  $f_n$  est continue et positive, donc  $I_n$  représente l'aire comprise entre les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = 1$ , la courbe  $\mathcal{C}_n$  et l'axe des abscisses. On voit sur le graphique que ces aires semblent décroissantes, donc la suite  $(I_n)$  semble décroissante.
- (b) Démontrer cette conjecture.  
Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\
 &= \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x}) dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x} dx
 \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $x^n \geq 0$ ,  $e^{-x} \geq 0$  et  $x - 1 \leq 0$  donc  $x^n (x - 1) e^{-x} \leq 0$ .

On intègre sur  $[0; 1]$  une fonction continue négative, donc le résultat est un nombre négatif par positivité de l'intégrale. On en déduit que  $I_{n+1} - I_n \leq 0$  pour tout  $n \geq 1$  donc  $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$ .

- (c) En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.  
Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est une fonction continue et positive sur  $[0; 1]$  donc  $I_n \geq 0$  par positivité de l'intégrale. Ainsi, la suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc, d'après la théorème de convergence monotone,  $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est convergente}}$ .

(d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$ .

Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0$ .

Méthode 1 :

Sur l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $x \mapsto -x$  est décroissante, donc par composition avec la fonction exponentielle,  $x \mapsto e^{-x}$  est décroissante, donc  $e^{-x} \leq e^0 = 1$ . Ainsi, sur  $[0; 1]$ ,  $f_n(x) = x^n e^{-x} \leq x^n$ .

Par propriété de l'intégration, on obtient alors :

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$ .

Méthode 2 :

On a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} \, dx$$

On définit les fonctions  $u_n$  et  $v$  sur  $[0; 1]$  par  $u_{n+1}(x) = x^{n+1}$  et  $v'(x) = e^{-x}$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on peut poser  $u'_{n+1}(x) = (n+1)x^n$  et  $v(x) = -e^{-x}$ .

De plus  $u_n$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0; 1]$ , et  $u'_n$  et  $v'$  sont continues sur  $[0; 1]$ .

Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 u_{n+1}(x) v'(x) \, dx \\ &= [u_{n+1}(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x) v(x) \, dx \\ &= [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x}) \, dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1) I_n \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{I_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)e} + I_n$$

Si  $\ell$  est la limite de  $I_n$  à l'infini, par passage à la limite, on obtient :  $0 = 0 + \ell$  donc  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0}$ .

## 2 Exercices du manuel

### 4 page 310

1. Pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 15x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

2. Pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ ,

$$g'(x) = 5 \times \left[ \frac{1}{2\sqrt{5x-10}} \right] = \frac{5}{2\sqrt{5x-10}}$$

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = -36x^3 \times e^{2-9x^4} = -36x^3 e^{2-9x^4}$$

4. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\ell'(x) = -\frac{6x}{(3x^2+1)^2}$$

### 5 page 310

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x^2 + 1 & v(x) &= 3x^2 + 1 \\ u'(x) &= 8x & v'(x) &= 6x \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{8x(3x^2+1) - (4x^2+1) \times 6x}{(3x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x}{(3x^2+1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

En conclusion,  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 6 page 310

1. On définit la fonction  $u$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = e^x - 2$  avec  $u'(x) = e^x$ .

Ainsi  $f(x) = 3u'(x)u(x)^2$ , d'où une primitive  $F$  de  $f$  est donnée par  $F(x) = (e^x - 2)^3$ .

2. On définit la fonction  $u$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = 5x + 2$  avec  $u'(x) = 5$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,

$$g(x) = \frac{1}{5} \times u'(x)e^{u(x)}$$

$g$  admet donc une primitive sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,  $G(x) = \frac{1}{5}e^{u(x)}$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,

$$G(x) = \frac{1}{5}e^{5x+2}$$

3. On définit la fonction  $u$  dérivable sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$  par  $u(x) = 3x^2 - 6$  avec  $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$ .

Ainsi, pour tout  $x \in I$ ,

$$h(x) = -\left(-\frac{6x}{(3x^2-6)^2}\right) = -\left(-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)$$

d'où  $h$  admet une primitive sur  $I$  de la forme  $H = -\frac{1}{u}$ . Ainsi, pour tout réel  $x$ ,

$$H(x) = -\frac{1}{3x^2-6}$$

4. On définit la fonction  $u$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x^2 + 7$  avec  $u'(x) = 2x$ .  
Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$k(x) = x \times (x^2 + 7)^{-4} = -\frac{1}{6} (-3 \times 2x \times (x^2 + 7)^{-4}) = -\frac{1}{6} (n \times u'(x) \times u(x)^{n-1})$$

$k$  admet donc une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $K = -\frac{1}{6}u^{-3}$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$K(x) = -\frac{1}{6}(x^2 + 7)^{-3} = -\frac{1}{6} \frac{1}{(x^2 + 7)^3}$$

5. On définit la fonction  $u$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x^2 + 4$  avec  $u'(x) = 2x$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\ell(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Ainsi  $\ell$  admet une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $L = \sqrt{u}$ . D'où, pour tout réel  $x$ ,

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

## 7 page 310

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

2. La primitive de  $f$  s'annulant en  $-1$  vérifie  $F(-1) = 0$ . On a donc :

$$F(-1) = 0 \iff (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 7 \times (-1) + k = 0 \iff k = \frac{17}{2}$$

La primitive de  $f$  s'annulant en  $-1$  est donc la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{17}{2}$ .

## 27 page 326

La fonction  $f$  est une fonction polynôme du second degré.

Le discriminant de ce polynôme vaut  $\Delta = 37$ , il admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}$$

Puisque  $x_1 < 1$  et  $x_2 < 1$ , la fonction  $f$  est donc continue et positive sur  $[1; \sqrt{3}]$ .

Elle admet pour primitive la fonction  $F$  définie par  $F(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x$ .

L'aire du domaine est donc égale à

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx = [F(x)]_1^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 5 \text{ u.a.}$$



### 30 page 326

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et admet pour primitive la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \frac{x^4}{4} - e^x + \frac{1}{7}x$ .  
La valeur moyenne de  $f$  sur  $[-1; 0]$  est donc

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{0 - (-1)} \int_{-1}^0 \left( x^3 - e^x + \frac{1}{7} \right) dx \\ &= \frac{1}{1} \left[ \frac{x^4}{4} - e^x + \frac{1}{7}x \right]_{-1}^0 \\ &= \left( \frac{0^4}{4} - e^0 + \frac{1}{7} \times 0 \right) - \left( \frac{(-1)^4}{4} - e^{-1} + \frac{1}{7} \times (-1) \right) \\ &= -\frac{31}{28} + e^{-1} \end{aligned}$$

### 60 page 329

Les fonctions à intégrer sont toutes continues donc admettent des primitives sur leur intervalle d'intégration.

$$1. \int_{-1}^4 (x^2 - 4x - 1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x \right]_{-1}^4 = -\frac{40}{3}$$

$$2. \int_{-2}^2 5 dx = [5x]_{-2}^2 = 20$$

$$3. \int_0^3 \left( \frac{1}{7}t + 2 \right) dt = \left[ \frac{1}{14}t^2 + 2t \right]_0^3 = \frac{93}{14}$$

$$4. \int_1^{\sqrt{2}} (x^4 - 2x^2 + 9) dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 9x \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{127\sqrt{2} - 128}{15}$$

$$5. \int_{-1}^1 (3t^3 + 3t^2 - 5t + 1) dt = \left[ \frac{3}{4}t^4 + t^3 - \frac{5}{2}t^2 + t \right]_{-1}^1 = 4$$

$$6. \int_1^3 1 dx = [x]_1^3 = 2$$

## 61 page 329

Les fonctions à intégrer sont toutes continues donc admettent des primitives sur leur intervalle d'intégration.

$$1. \int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2} dx = \left[ -\frac{4}{x} \right]_{-2}^{-1} = 2$$

$$2. \int_5^1 e^x dx = [e^x]_5^1 = e - e^5$$

(Attention, dans cette question, les bornes de l'intervalle ont été inversées : le nombre le plus petit est en haut).

$$3. \int_2^{49} \frac{3}{\sqrt{x}} dx = [6\sqrt{x}]_2^{49} = 42 - 6\sqrt{2}$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \left( e^x + 3x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ e^x + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{x} \right]_{-2}^{-1} = \frac{-47e^2 + 4e - 4}{4e^2}$$

## 62 page 329

Les fonctions à intégrer sont toutes continues donc admettent des primitives sur leur intervalle d'intégration.

$$1. \text{ La fonction } x \mapsto 3x^2(5x^3 - 1)^2 \text{ est de la forme } \frac{1}{15}u'u^2 \text{ avec } u(x) = 5x^3 - 1 \text{ et } u'(x) = 15x^2.$$

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto \frac{1}{15}(5x^3 - 1)^3$ . D'où

$$\int_{-1}^2 3x^2(5x^3 - 1)^2 dx = \left[ \frac{1}{15}(5x^3 - 1)^3 \right]_{-1}^2 = 3969$$

$$2. \text{ La fonction } x \mapsto e^{5x-1} \text{ est de la forme } \frac{1}{5}u'e^u \text{ avec } u(x) = 5x - 1 \text{ et } u'(x) = 5.$$

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto \frac{1}{5}e^{5x-1}$ .

D'où

$$\int_{-2}^1 e^{5x-1} dx = \left[ \frac{1}{5}e^{5x-1} \right]_{-2}^1 = \frac{e^4 - e^{-11}}{5}$$

$$3. \text{ La fonction } x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \text{ est de la forme } \frac{3}{2} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ avec } u(x) = 2x^2 + 1 \text{ et } u'(x) = 4x.$$

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{2x^2 + 1}$ .

D'où

$$\int_{-2}^3 \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \left[ \frac{3}{2}\sqrt{2x^2 + 1} \right]_{-2}^3 = \frac{3\sqrt{19} - 9}{2}$$

$$4. \text{ La fonction } x \mapsto e^x(5e^x + 3)^2 \text{ est de la forme } \frac{1}{15}u'u^2 \text{ avec } u(x) = 5e^x + 3 \text{ et } u'(x) = 5e^x.$$

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto \frac{1}{15}(5e^x + 3)^3$ .

D'où

$$\int_0^2 e^x(5e^x + 3)^2 dx = \left[ \frac{1}{15}(5e^x + 3)^3 \right]_0^2 = \frac{(5e^2 + 3)^3 - 512}{3}$$

$$5. \text{ La fonction } x \mapsto \frac{2}{(3 - 5x)^2} \text{ est de la forme } -\frac{2}{5} \frac{u'}{u^2} \text{ avec } u(x) = 3 - 5x \text{ et } u'(x) = -5.$$

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto \frac{2}{5} \times \frac{1}{3 - 5x}$ .

D'où

$$\int_1^2 \frac{2}{(3 - 5x)^2} dx = \left[ \frac{2}{5} \frac{1}{3 - 5x} \right]_1^2 = \frac{1}{7}$$

6. Pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$  est de la forme  $-u'e^u$ , avec  $u(x) = \frac{1}{x}$  et  $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Une primitive de cette fonction est donc  $x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$ .

D'où

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[ -e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = e - e^{\frac{1}{2}}$$

## 66 page 330

Les fonctions à intégrer sont toutes continues donc admettent des primitives sur leur intervalle d'intégration.

1. Pour tout  $x \in [-1; 2]$ ,

$$f(x) = x(3x^2 - 1)^2 = \frac{1}{18} \times 3 \times 6x \times (3x^2 - 1)^2 = \frac{1}{18} \times 3 \times u'(x) \times (u(x))^{3-1}$$

avec  $u(x) = 3x^2 - 1$  et  $u'(x) = 6x$

Une primitive de cette fonction est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{18}(u(x))^3 = \frac{1}{18}(3x^2 - 1)^3$ .

La valeur moyenne de  $f$  sur  $[-1; 2]$  est donc égale à

$$M = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 x(3x^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{18}(3x^2 - 1)^3 \right]_{-1}^2 = \boxed{\frac{49}{2}}$$

2. Pour tout  $x \in [-1; 3]$ ,

$$f(x) = -3xe^{x^2-2} = -\frac{3}{2} \times 2x \times e^{x^2-2} = -\frac{3}{2} \times u'(x) \times e^{u(x)}$$

avec  $u(x) = x^2 - 2$  et  $u'(x) = 2x$

Une primitive de cette fonction est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = -\frac{3}{2}e^{u(x)} = -\frac{3}{2}e^{x^2-2}$ .

La valeur moyenne de  $f$  sur  $[-1; 3]$  est donc égale à

$$M = \frac{1}{3 - (-1)} \int_{-1}^3 -3xe^{x^2-2} dx = \frac{1}{4} \left[ -\frac{3}{2}e^{x^2-2} \right]_{-1}^3 = \boxed{\frac{3(-e^7 + e^{-1})}{8}}$$

3. Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$f(x) = \frac{x^2}{(8 - x^3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{(8 - x^3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$$

avec  $u(x) = 8 - x^3$  et  $u'(x) = -3x^2$

Une primitive de cette fonction est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8 - x^3}$ .

La valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 1]$  est donc égale à

$$M = \frac{1}{1 - 0} \int_0^1 \frac{x^2}{(8 - x^3)^2} dx = \left[ \frac{1}{3} \times \frac{1}{8 - x^3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{168}}$$

4. Pour tout  $x \in [1; 4]$ ,

$$f(x) = \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}} = \frac{3}{10} \times \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2}} = \frac{3}{10} \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

avec  $u(x) = x^4 + 2$  et  $u'(x) = 4x^3$

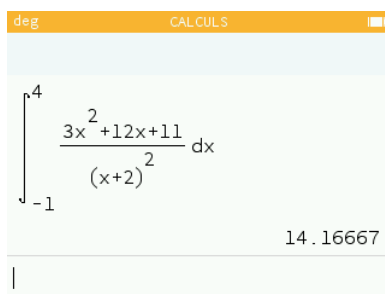
Une primitive de cette fonction est donc la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{3}{10} \times \sqrt{u(x)} = \frac{3}{10} \times \sqrt{x^4 + 2}$ .

La valeur moyenne de  $f$  sur  $[1; 4]$  est donc égale à

$$M = \frac{1}{4 - 1} \int_1^4 \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{10} \times \sqrt{x^4+2} \right]_1^4 = \boxed{\frac{\sqrt{258} - \sqrt{3}}{10}}$$

## 73 page 330

1. À l'aide d'une calculatrice, on obtient  $\int_{-1}^4 f(x) dx \approx 14,17$ .



2. (a) Pour tout réel  $x \neq -2$ ,

$$3 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x + 11}{(x+2)^2}$$

Par conséquent, pour tout réel  $x \neq -2$ ,  $f(x) = 3 - \frac{1}{(x+2)^2}$ .

(b)  $f$  est une fonction continue, car dérivable, sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

On a alors

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 \left( 3 - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx = \left[ 3x + \frac{1}{x+2} \right]_{-1}^4 = \frac{85}{6}$$

## 76 page 331

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[-1; 1]$  par  $u'(x) = e^{-x}$  et  $v(x) = 3x$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [-1; 1]$ , on peut poser  $u(x) = -e^{-x}$  et  $v'(x) = 3$ .

De plus  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[-1; 1]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[-1; 1]$ .

Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 3xe^{-x} dx &= [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx \\ &= [-3xe^{-x}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -3e^{-x} dx \\ &= -3e^{-1} - 3e^1 - [3e^{-x}]_{-1}^1 \\ &= -3e^{-1} - 3e^1 - (3e^{-1} - 3e^1) \\ &= -6e^{-1} \end{aligned}$$

## 78 page 331

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[-1; 2]$  par  $u'(x) = \frac{1}{(2+x)^3}$  et  $v(x) = x$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [-1; 2]$ , on peut poser  $u(x) = -\frac{1}{2(2+x)^2}$  et  $v'(x) = 1$ .

De plus  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[-1; 2]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[-1; 2]$ .

Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 \frac{x}{(2+x)^3} dx &= [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{x}{(2+x)^2} \right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 -\frac{1}{2} \frac{1}{(2+x)^2} dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{x}{(2+x)^2} \right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 -\frac{1}{2} \frac{1}{(2+x)^2} dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{x}{(2+x)^2} \right]_{-1}^2 - \left[ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+x} \right]_{-1}^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{2}{(2+2)^2} - \left( -\frac{1}{2} \frac{-1}{(2-1)^2} \right) - \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2-1} \right) \\
 &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

### 103 page 334

La fonction  $g: x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$  est continue, car dérivable, sur  $\mathbb{R}$  et est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$ .

Elle admet donc une primitive  $G$  de la forme  $G = -\frac{1}{u}$ .

Ainsi une primitive de  $g$  est la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$ .

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \left[ -\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1 = -\frac{1}{e + 1} + \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{(e^x + 1)^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 + e^x}{(e^x + 1)^2} dx && \text{Identité remarquable un peu planquée!} \\
 &= \int_0^1 \frac{(e^x + 1)^2 + e^x}{(e^x + 1)^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \int_0^1 1 dx - \frac{1}{e + 1} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{e + 1}
 \end{aligned}$$

### 107 page 335

#### Partie A

1. Pour tout  $x \in [0; 4]$ ,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3,6e^{-0,6x} + (3,6x + 2,4) \times (-0,6)e^{-0,6x} \\
 &= (3,6 - 2,16x - 1,44)e^{-0,6x} \\
 &= (-2,16x + 2,16)e^{-0,6x}
 \end{aligned}$$

2. (a) Pour tout  $x \in [0; 4]$ ,  $e^{-0,6x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-2,16x + 2,16$ .

$$\begin{array}{ll} -2,16x + 2,16 \geq 0 & -2,16x + 2,16 = 0 \\ \Leftrightarrow -2,16x \geq -2,16 & \Leftrightarrow -2,16x = -2,16 \\ \Leftrightarrow x \leq 1 & \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

(b) D'après la question précédente, on obtient le tableau de variations ci-dessous.

$x$	0	1	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$f(1)$	$f(4)$

$$f(1) = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89$$

$$f(4) = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12$$

3.

$$\int_0^4 f(x) dx = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0) = 8,4 - 38e^{-2,4} \approx 4,95$$

## Partie B

1.  $g$  est continue sur  $[0; 4]$ .  $g$  admet donc des primitives sur  $[0; 4]$ .

Une primitive de  $g$  est  $G$  définie sur  $[0; 4]$  par  $G(x) = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x$ .

On en déduit que :

$$\int_0^{0,5} g(x) dx = G(0,5) - G(0) = \frac{1}{6}$$

2. L'aire du domaine grisé est égale à 2 fois l'aire du domaine grisé situé au-dessus de l'axe des abscisses.

Cette dernière a pour aire, en u.a.,

$$\int_0^4 f(x) dx - \int_0^{0,5} g(x) dx$$

puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 4$ , à laquelle on soustrait l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de  $g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 0,5$ .

On a

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx - \int_0^{0,5} g(x) dx &= 8,4 - 38e^{-2,4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{247}{30} - 38e^{-2,4} \end{aligned}$$

L'aire du domaine grisé vaut donc

$$2 \times \left( \frac{247}{30} - 38e^{-2,4} \right) = \frac{247}{15} - 76e^{-2,4} \approx 9,57 \text{ u.a.}$$

## 5 page 340

### Partie A

1. On a :

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

$$u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$$

$$u_4 = 4u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -17$$

2. On complète l'algorithme comme ci-dessous.

```
Pour N allant de 1 à 12 :  
    U ← (N + 1)U - 1  
Fin pour
```

Il faut être capable de transcrire ce petit programme en Python.

```
u=0.7  
for k in range(1,13):  
    u=(k+1)*u-1  
print(u)
```



En Python, si on utilise `for k in range(1,13)`, `k` va varier entre 1 et 12.

3. Si  $u_1 = 0,7$ , la limite de la suite  $(u_n)$  semble être  $-\infty$ .

Si  $u_1 = 0,8$ , la limite de la suite  $(u_n)$  semble être  $+\infty$ .

### Partie B

1. Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$F'(x) = -e^{1-x} - (-1-x)e^{1-x} = xe^{1-x} = f(x)$$

Ainsi  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

2. Comme la fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; 1]$  alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= F(1) - F(0) \\ &= -2 - (-e) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

3. (a) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\text{On a } I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx.$$

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[0; 1]$  par  $u'(x) = e^{1-x}$  et  $v(x) = x^{n+1}$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on peut poser  $u(x) = -e^{1-x}$  et  $v'(x) = (n+1)x^n$ .

De plus  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0; 1]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[0; 1]$ .

Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx \\ &= [(-e^{1-x}) \times x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{1-x})(n+1)x^n dx \\ &= -1 + \int_0^1 e^{1-x}(n+1)x^n dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1)I_n \\ &= (n+1)I_n - 1 \end{aligned}$$

(b) On a  $I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$ .

4. (a) Soit  $x$  un nombre réel de l'intervalle  $[0; 1]$  et soit  $n$  un entier naturel non nul.

On a  $-1 \leq -x \leq 0$  donc  $0 \leq 1-x \leq 1$ . Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient  $1 \leq e^{1-x} \leq e$ , puis  $0 \leq e^{1-x} \leq e$ . Enfin, en multipliant par  $x^n$ , qui est un nombre positif, on obtient  $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ .

(b) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. D'après la question précédente, on a  $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$  donc

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx \iff 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

(c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ .

Ainsi, d'après l'inégalité obtenue à la question précédente et le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

## Partie C

1. ■ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$P(n) : u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$$

### ■ Initialisation :

Pour  $n = 1$ ,  $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 - e + 2 + e - 2 = u_1$ .

Par conséquent,  $P(1)$  est vraie.

### ■ Hérité :

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P(k)$  est vraie. Autrement dit, on suppose que  $u_k = k!(u_1 - e + 2) + I_k$ .

On veut démontrer que  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $u_{k+1} = (k+1)!(u_1 - e + 2) + I_{k+1}$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k+1)u_k - 1 \\ &= (k+1)(k!(u_1 - e + 2) + I_k) - 1 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (k+1)k!(u_1 - e + 2) + (k+1)I_k - 1 \\ &= (k+1)!(u_1 - e + 2) + (k+1)I_k - 1 \\ &= (k+1)!(u_1 - e + 2) + I_{k+1} && \text{d'après la partie B} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $P(k+1)$  est vraie.

### ■ Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$ .

2. (a) D'après la partie B, on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

Comme  $u_1 = 0,7$ ,  $u_1 - e + 2 \approx -0,018$ , alors  $u_1 - e + 2 < 0$ .

On obtient donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n!(u_1 - e + 2) = -\infty$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

(b) Comme  $u_1 = 0,8$ ,  $u_1 - e + 2 \approx 0,082$ , alors  $u_1 - e + 2 > 0$ .

On obtient donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n!(u_1 - e + 2) = +\infty$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### 3 Autres exercices

#### Entraînement - Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(x)$ .

1. Montrer que  $F(x) = \frac{x^2}{4} (2 \ln(x) - 1)$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2x}{4} \times (2 \ln(x) - 1) + \frac{x^2}{4} \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{x}{2} (2 \ln(x) - 1) + \frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} \times 2 \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \\ &= x \ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $\int_2^4 f(x) dx$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x) dx &= [F(x)]_2^4 \\ &= \frac{4^2}{4} (2 \ln(4) - 1) - \frac{2^2}{4} (2 \ln(2) - 1) \\ &= 16 \ln(2) - 4 - 2 \ln(2) + 1 \\ &= 4(2 \ln(2^2) - 1) - 2 \ln(2) + 1 \\ &= 14 \ln(2) - 3 \end{aligned}$$

#### Entraînement - Exercice 2

Calculer la valeur moyenne de la fonction inverse sur  $[4; 16]$ .

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{16 - 4} \int_4^{16} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{12} [\ln(x)]_4^{16} \\ &= \frac{1}{12} (\ln(16) - \ln(4)) \\ &= \frac{1}{12} (4 \ln(2) - 2 \ln(2)) \\ &= \frac{2 \ln(2)}{12} \\ &= \frac{\ln(2)}{6} \end{aligned}$$

#### Entraînement - Exercice 3

A l'aide d'une intégration par partie, calculer  $I = \int_1^2 (x - 2)e^{2x} dx$ .

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[1; 2]$  par  $u'(x) = e^{2x}$  et  $v(x) = x - 2$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [1; 2]$ , on peut poser  $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$  et  $v'(x) = 1$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[1; 2]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[1; 2]$ .  
Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2 \times 2} (2 - 2) - \frac{1}{2} e^{2 \times 1} (1 - 2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} e^{2 \times 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{4} e^2 \\ &= \frac{3e^2 - e^4}{4} \end{aligned}$$

### Entraînement - Exercice 4

On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0; 1]$  par  $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

1. Montrer que  $h$  est décroissante sur  $[0; 1]$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $[0; 1]$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $[0; 1]$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[0; 1]$ .

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $h(x) = \frac{1}{u(x)}$  avec  $u(x) = 1 + x^2$  et  $u'(x) = 2x$ .

Par conséquent,

$$h'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $-2x \leq 0$  et  $(1+x^2)^2 > 0$  donc  $h'(x) \leq 0$  et ainsi  $h$  est décroissante sur  $[0; 1]$ .

2. Déterminer alors un encadrement de  $h(x)$  sur  $[0; 1]$ .

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $[0; 1]$  :

$x$	0	1
$h(x)$	1	$\frac{1}{2}$

$$h(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

$$h(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq 1$ .

3. En déduire que  $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 h(x) dx \leq 1$ .

En intégrant l'encadrement précédent, par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2} dx &\leq \int_0^1 h(x) dx \leq \int_0^1 1 dx \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^1 &\leq \int_0^1 h(x) dx \leq [x]_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq \int_0^1 h(x) dx \leq 1 \end{aligned}$$

## Entraînement - Exercice 5

On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$  et  $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leur courbe représentative respective.

1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection  $A$  et  $B$  des deux courbes.

Pour déterminer les points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , on résout l'équation  $f(x) = g(x)$ .

$$\begin{aligned}f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2) \\ &\iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 6) \\ &\iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \\ &\iff x^2 - x - 6 = 0\end{aligned}$$

On a  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$  donc cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$$

Calculons maintenant les ordonnées de ces points d'intersection :

$$f(-2) = g(-2) = -\frac{1}{2}(-2-3)(-2+2) = 0$$

$$f(3) = g(3) = -\frac{1}{2}(3-3)(3+2) = 0$$

En conclusion,  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont deux points d'intersection  $A(-2; 0)$  et  $B(3; 0)$ .

2. Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

D'après la question précédente, on sait que  $f(x) - g(x) = x^2 - x - 6$ .

Puisque  $a = 1 > 0$ , on a le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$		$-2$		$3$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	

On en déduit que :

- $\mathcal{C}_f$  est au-dessus  $\mathcal{C}_g$  sur  $] -\infty; -2[ \cup ] 3; +\infty[$
- $\mathcal{C}_f$  est en dessous  $\mathcal{C}_g$  sur  $] -2; 3[$ .
- $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent en  $x = -2$  et en  $x = 3$ .

3. Calculer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de  $A$  et l'abscisse de  $B$ .

On déduit des questions précédentes que l'aire entre les deux courbes sur  $[-2; 3]$  est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) \, dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^3 \\ &= -\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6 \times 3 - \left( -\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6 \times (-2) \right) \\ &= \frac{125}{6}\end{aligned}$$

