Table des matières

1 Exemples du cours

Exemple 3

Dans chaque cas, plusieurs méthodes sont possibles.
Avec davantage de pratique, vous prendrez l'habitude d'utiliser la méthode la plus adaptée.
Peut-être trouverez-vous des méthodes plus rapides que celles que j'ai utilisées !

1. $u_n = n^2 - n + 2$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - (n+1) + 2 - (n^2 - n + 2) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 2 - n^2 + n - 2 \\ &= 2n \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

2. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$
Pour tout entier n, on a $u_n > 0$. ⚠ *Cette hypothèse est nécessaire pour utiliser la méthode qui suit*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} \\ &= \frac{2}{3} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante}}$

3. $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1) - 2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} \\ &= \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\ &= \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)} && \text{(mise au même dénominateur)} \\ &= \frac{3n^2 + 3n + n + 1 - 3n^2 - 6n + 2n + 4}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{5}{(n+1)(n+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$

<u>Autre méthode :</u>
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$.
(Cette fonction admet une valeur interdite en $x = -1$ mais ici $-1 \notin \mathbb{R}^+$)

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = 3x - 2 & v(x) = x + 1 \\ u'(x) = 3 & v'(x) = 1 \end{array}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{3(x+1) - (3x-2) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$

4. $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{3}(n+1) + 3 - \left(-\frac{1}{3}n + 3\right) \\ &= -\frac{1}{3} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante}}$

5. $u_n = (n-5)^2$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1-5)^2 - (n-5)^2 \\ &= n^2 - 8n + 16 - n^2 + 10n - 25 \\ &= 2n - 9 \end{aligned}$$

On constate que $2n - 9 \geqslant 0$ dès que $n \geqslant 5$.
Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante à partir de } n = 5.}$

6. $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) && \text{on factorise par } \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$

7. (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$
À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) est croissante.
Démontrons ce résultat par récurrence.

- Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_{n+1} \geqslant u_n$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 5$.
$u_1 \geqslant u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que $u_{k+1} \geqslant u_k$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$$

On a :

$$\begin{aligned} & u_{k+1} \geqslant u_k & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Longrightarrow\ & 2 \times u_{k+1} \geqslant 2 \times u_k \\ \Longrightarrow\ & 2 \times u_{k+1} + 3 \geqslant 2 \times u_k + 3 \\ \Longrightarrow\ & u_{k+2} \geqslant u_{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n}$

On en déduit donc que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

8. (u_n) définie par $u_0 = 80$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 30$

À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante.
Démontrons ce résultat par récurrence.

- Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 80$ et $u_1 = 0,5 \times u_0 + 30 = 70$.
$u_1 \leqslant u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que $u_{k+1} \leqslant u_k$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

On a :

$$\begin{aligned} & u_{k+1} \leqslant u_k & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Longrightarrow\ & 0,5 \times u_{k+1} \leqslant 0,5 \times u_k \\ \Longrightarrow\ & 0,5 \times u_{k+1} + 30 \leqslant 0,5 \times u_k + 30 \\ \Longrightarrow\ & u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n}$

On en déduit donc que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

2 Feuille d'exercices

Exercice 1

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n)\ :\ u_n \leqslant 1$$
- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = -1 \leqslant 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k \leqslant 1$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant 1$.
On a :
$$\begin{aligned}
&u_k \leqslant 1 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&0,2u_k \leqslant 0,2 \times 1 &&\\
&0,2u_k + 0,6 \leqslant 0,2 + 0,6 &&\\
&u_{k+1} \leqslant 0,8 \leqslant 1 &&
\end{aligned}$$
Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant 1}$.

Exercice 2

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n)\ :\ v_n = 2 \times 3^n + 1$$
- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a d'une part $v_0 = 3$ et d'autre part $2 \times 3^0 + 1 = 3$.
On a bien égalité donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $v_k = 2 \times 3^k + 1$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} + 1$.
On a :
$$\begin{aligned}
&v_{k+1} = 3v_k - 2 &&\\
&v_{k+1} = 3 \times \left(2 \times 3^k + 1\right) - 2 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&v_{k+1} = 2 \times 3^k \times 3 + 3 - 2 &&\\
&v_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} + 1 &&
\end{aligned}$$
Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n = 2 \times 3^n + 1}$.

Exercice 5

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n)\ :\ 0 \leqslant w_n \leqslant 4$$
- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $w_0 = 0$ donc $0 \leqslant w_0 \leqslant 4$.
Par conséquent, $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leqslant w_k \leqslant 4$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant w_{k+1} \leqslant 4$.
  On a :

$$\begin{array}{ll}
0 \leqslant w_k \leqslant 4 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
0,5 \times 0 \leqslant 0,5 w_k \leqslant 0,5 \times 4 & \\
0 + 8 \leqslant 0,5 w_k + 8 \leqslant 2 + 8 & \\
\sqrt{8} \leqslant \sqrt{0,5 w_k + 8} \leqslant \sqrt{10} & \textbf{car la fonction racine carrée est } \textcolor{red}{\textbf{croissante}} \textbf{ sur } [0;+\infty[\\
0 \leqslant \sqrt{8} \leqslant w_{k+1} \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4 &
\end{array}$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant w_n \leqslant 4}$.

> - Composer une inégalité par une fonction croissante préserve son sens.
> - Composer une inégalité par une fonction décroissante change son sens.
>
> Cet argument est le plus important de la récurrence précédente et il ne faut surtout pas l'oublier !

Exercice 6

3. - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n)\ :\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, la somme de gauche est égale à 0.
  D'autre part, le terme de droite vaut $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.
  On a bien égalité donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie.
  Autrement dit, on suppose que $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

  On a :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\left(k^2 + 4(k+1)\right)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\left(k^2 + 4k + 4\right)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Exercice 10

1.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$P(n) \ : \ v_n = \frac{n}{3^n}$$
- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $v_1 = \frac{1}{3}$ et d'autre part $\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.
  On a bien égalité donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $v_k = \frac{k}{3^k}$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$.
  On a :
$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{k+1}{3k} v_k \\ v_{k+1} &= \frac{k+1}{3k} \times \frac{k}{3^k} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ v_{k+1} &= \frac{k+1}{3^{k+1}} && \text{car } k \neq 0 \end{aligned}$$
  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_n = \frac{n}{3^n}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = \dfrac{n}{3^n} > 0$ car $n > 0$ et $3^n > 0$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$$

Puisque $n \geq 1$, alors $3n > n + n \geq n + 1$ donc $\dfrac{n+1}{3n} < 1$.
On vient de prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.
En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante}}$.

3. A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{3}$$

— On sait déjà que (v_n) est décroissante, et on sait que $v_1 = \dfrac{1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $v_n \leq \dfrac{1}{3}$.

— On a également déjà prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \geq 0$ car, par définition, $v_n = \dfrac{n}{3^n}$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{3}}$.

Exercice 11

1. Le terme u_n fournit le nombre de milliers d'arbres en $2020 + n$, donc u_0 fournit le nombre de milliers d'arbres en $2020 + 0 = 2020$. D'après l'énoncé, ce nombre d'arbres est de $50\ 000$, soit 50 milliers, d'où $\boxed{u_0 = 50}$.
De plus, chaque année, on sait que 5% des u_n arbres sont retirés, et que $3\ 000$ nouveaux sont ajoutés.
D'où $\boxed{u_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_n + 3 = 0,95 u_n + 3}$.

2. Le tableau de valeurs de la calculatrice permet de conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante.
Prouvons le par récurrence.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P(n) \ : \ u_{n+1} > u_n$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 50$ et $u_1 = 0,95 \times 50 + 3 = 50,5$.
  Ainsi $u_1 > u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_{k+1} > u_k$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} > u_{k+1}$.
  On a :

$$\begin{aligned} & u_{k+1} > u_k && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & 0,95u_{k+1} > 0,95u_k \\ & 0,95u_{k+1} + 3 > 0,95u_k + 3 \\ & u_{k+2} > u_{k+1} \end{aligned}$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} > u_n}$.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien strictement croissante}}$.

3. - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n)\ :\ u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a d'une part $u_0 = 50$ et d'autre part $60 - 10 \times 0,95^0 = 50$.
  On a bien égalité donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k = 60 - 10 \times 0,95^k$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 60 - 10 \times 0,95^{k+1}$.
  On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 0,95u_k + 3 \\ u_{k+1} &= 0,95 \times \left(60 - 10 \times 0,95^k\right) + 3 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ u_{k+1} &= 57 - 10 \times 0,95^{k+1} + 3 \\ u_{k+1} &= 60 - 10 \times 0,95^{k+1} \end{aligned}$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 60 - 10 \times 0,95^n}$.

4. L'année 2026 correspond au rang $n = 6$ et $u_6 = 60 - 10 \times 0,95^6 \approx 52,649$.
$\boxed{\text{Il y aura donc environ 52 649 arbres dans la forêt en 2026 selon ce modèle.}}$

5. (a) Voici deux propositions de programme qui fonctionnent :

```
u = 50
n = 0
while u < 55 :
    u = 0.95 * u + 3
    n = n + 1
print(n)
```

```
u = 50
n = 0
while u < 55 :
    n = n + 1
    u = 60 - 10 * 0.95 ** n
print(n)
```

(b) On a $u_{14} \approx 54,867 < 55$ et $u_{15} \approx 55,123 > 55$.
$\boxed{\text{L'algorithme renverra donc la valeur 15.}}$

6. On a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$.
Or, $-10 \times 0,95^n < 0$, donc $60 - 10 \times 0,95^n < 60$.
Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ on a } u_n < 60}$.

7. On observe sur le tableau de valeurs de la calculatrice que les termes de la suite (u_n) tendent de plus en plus vers $\boxed{60}$ (sans jamais l'atteindre d'après la question 6).
Cela signifie que, $\boxed{\text{au fil des années, le nombre d'arbres dans la forêt va tendre vers 60 000 arbres}}$.

Exercice 12

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $B = n^3 - n$ est un multiple de 3.

<u>Astuce :</u>

On peut tout d'abord remarquer que :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$$

Ainsi, ce nombre est le produit de trois entiers consécutifs dont l'un est nécessairement un multiple de 3 donc le produit l'est aussi.

<u>Méthode 1 :</u> On raisonne par **récurrence**.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $n^3 - n$ est un multiple de 3 ».

- <u>Initialisation :</u>

Pour $n = 0$, on a $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0$ qui est bien un multiple de 3 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- <u>Hérédité :</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que $k^3 - k$ est un multiple de 3.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$(k+1)^3 - (k+1) \text{ est un multiple de } 3$$

On a :

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\
&= k^3 + 3k^2 + 2k \\
&= k^3 - k + 3k^2 + 3k \\
&= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\
&= 3K_1 + 3K_2 \quad \text{avec } K_1,\ K_2 \in \mathbb{Z} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Finalement, $(k+1)^3 - (k+1)$ est bien un multiple de 3. Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion :</u>

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$k^3 - k \text{ est un multiple de } 3$$

<u>Méthode 2 :</u> On construit un **tableau de congruences** modulo 3.

$n \equiv \ldots\ [3]$	0	1	2
$n - 1 \equiv \ldots\ [3]$	2	0	1
$n + 1 \equiv \ldots\ [3]$	1	2	0
$n(n-1)(n+1) \equiv \ldots\ [3]$	0	0	0

Dans tous les cas, $n^3 - n = n(n-1)(n+1) \equiv 0\,[3]$ donc B est bien un multiple de 3.

<u>Méthode 3 :</u> On raisonne par **disjonction de cas**.

Soit n un entier naturel.

- Cas 1 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.
  Dans ce cas, on a alors $B = 3(k(3k-1)(3k+1))$.
  B est donc divisible par 3.
- Cas 2 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+1$.
  Dans ce cas, on alors $B = (3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1) = 3(k(3k+1)(3k+2))$.
  B est donc divisible par 3.
- Cas 3 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+2$.
  Dans ce cas, on alors $N = (3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1) = 3((3k+2)(3k+1)(k+1))$.
  B est donc divisible par 3.

Ainsi, pour tout entier naturel n, B est bien un multiple de 3.

Exercice 13

C'est plutôt bien expliqué sur cet article de mathsenjeans :
`https://www.mathenjeans.be/documents/articles/2016_2017/Tour_de_hanoi.pdf`

Exercice 14

> Le principe de la récurrence double est le suivant : pour l'hérédité, au lieu d'utiliser le terme précédent, on va utiliser les deux termes précédents. La conséquence sur l'initialisation est qu'on va alors avoir besoin des deux premiers termes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n) \ : \ u_n = 1 + 2^n$$
- **Initialisation :**
  On démontre ici que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
  $1 + 2^0 = 2 = u_0$ et $1 + 2^1 = 3 = u_1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies. Autrement dit, on suppose que $u_k = 1 + 2^k$ et $u_{k+1} = 1 + 2^{k+1}$.
  On veut démontrer que $P(k+2)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} = 1 + 2^{k+2}$.
  On a :
$$\begin{aligned}
u_{k+2} &= 3u_{k+1} - 2u_k \\
u_{k+2} &= 3 \times (1 + 2^{k+1}) - 2 \times (1 + 2^k) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
u_{k+2} &= 3 + 3 \times 2^{k+1} - 2 - 2 \times 2^k \\
u_{k+2} &= 1 + 3 \times 2^{k+1} - 2^{k+1} \\
u_{k+2} &= 1 + 2 \times 2^{k+1} \\
u_{k+2} &= 1 + 2^{k+2}
\end{aligned}$$
  Par conséquent, $P(k+2)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence double, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 1 + 2^n}$.

Exercice 15 (très difficile)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$P(n) \ : \ \text{« Il existe deux entiers } p \text{ et } q \text{ tels que } n = 2^p(2q+1) \text{ »}$$
- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$. La propriété est donc vraie en prenant $p = 0$ et $q = 0$.
  Par conséquent, $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

> Hors programme : C'est ça la spécificité de la récurrence forte. La seule différence avec une récurrence classique est que l'on suppose que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers k compris entre 1 et n au sens large, alors que pour la récurrence normale, on considère seulement un entier naturel k (et pas tous les entiers naturels k compris entre 1 et n).

  Autrement dit, on suppose que, pour chaque entier $k \in [\![1;n]\!]$, il existe deux entiers p et q tels que $k = 2^p(2q+1)$.
  On veut démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers p et q tels que $n+1 = 2^p(2q+1)$.

  On a deux cas selon que $n+1$ soit pair ou impair.
  - Si $n+1$ est pair, alors $n+1 = 2 \times \dfrac{n+1}{2}$.
    On a $1 \leqslant \dfrac{n+1}{2} \leqslant n$ donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence sur $k = \dfrac{n+1}{2}$.
    Il existe donc deux entiers p' et q' tels que $\dfrac{n+1}{2} = 2^{p'}(2q'+1)$.
    Ainsi, en posant $p = p'+1$ et $q' = q$, on a bien $n+1 = 2^p(2q+1)$.
  - Si n est impair, alors en posant $p = 0$ et $q = \dfrac{n}{2}$, on a bien $n+1 = 2^p(2q+1)$.

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence forte, on a démontré que :
  $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n\text{, il existe deux entiers } p \text{ et } q \text{ tels que } n = 2^p(2q+1)}$.

3 Exercices du manuel

Exercice 1 page 126

1. $u_1 = 8$ $u_2 = 11$ $u_3 = 14$ $u_5 = 20$
2. $u_1 = 1$ $u_2 = 3$ $u_3 = 7$ $u_5 = 31$
3. $u_1 = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{2}{3}$ $u_3 = \frac{3}{4}$ $u_5 = \frac{5}{6}$
4. $u_1 = 9$ $u_2 = 25$ $u_3 = 57$ $u_5 = 249$
5. Lorsque $n = 0$, on a $u_{0+1} = 3 \times u_0 - 2 \times 0$ donc $u_1 = 3 \times 2 - 2 \times 0 = 6$.
   Lorsque $n = 1$, on a $u_{1+1} = 3 \times u_1 - 2 \times 1$ donc $u_2 = 3 \times 6 - 2 \times 1 = 16$.
   Lorsque $n = 2$, on a $u_{2+1} = 3 \times u_2 - 2 \times 2$ donc $u_3 = 3 \times 16 - 2 \times 2 = 44$.
   Lorsque $n = 3$, on a $u_{3+1} = 3 \times u_3 - 2 \times 3$ donc $u_4 = 3 \times 44 - 2 \times 3 = 126$.
   Lorsque $n = 4$, on a $u_{4+1} = 3 \times u_4 - 2 \times 4$ donc $u_5 = 3 \times 126 - 2 \times 4 = 370$.

Exercice 4 page 126

1. Pour tout entier naturel n, $w_n = 2 - 3n$.
2. Pour tout entier naturel n, $w_n = 18 + 5n$.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = \frac{3}{4} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$.

Exercice 5 page 126

1. Pour tout entier naturel n, $p_n = 3 \times 4^n$.
2. Pour tout entier naturel n, $p_n = \frac{1}{2} \times (-2)^n$.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Exercice 6 page 126

1. $u_0 = -2$
   $u_1 = 0,5 \times u_0 + 3 = 0,5 \times (-2) + 3 = 2$
   $u_2 = 0,5 \times u_1 + 3 = 0,5 \times 2 + 3 = 4$
2. L'objectif de cette question est de déterminer une formule explicite de la suite (u_n).
   La suite (u_n) n'étant ni arithmétique, ni géométrique, il n'existe aucune formule permettant d'obtenir immédiatement une forme explicite de la suite (u_n). On utilise donc une suite auxiliaire (v_n) qui s'avèrera géométrique afin d'y parvenir.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= 0,5u_n + 3 - 6 \\ &= 0,5u_n - 3 \\ &= 0,5\,(u_n - 6) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

   De plus, $v_0 = u_0 - 6 = -8$.
   Par conséquent, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = -8$.

   (b) D'après ce qui précède, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n$$
$$\boxed{v_n = -8 \times 0,5^n}$$

   (c) Enfin, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 6$, alors $u_n = v_n + 6$, d'où finalement

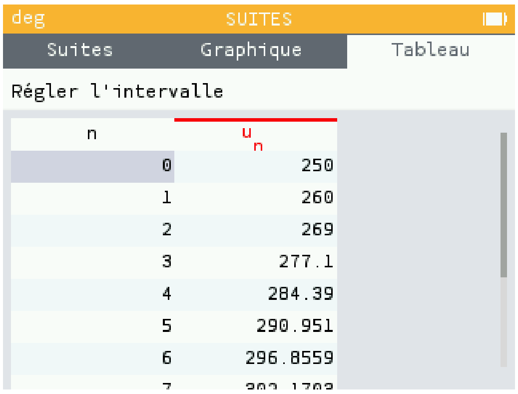
$$\boxed{u_n = -8 \times 0,5^n + 6}$$

Exercice 7 page 126

1. $u_1 = 250 \times 0,9 + 35 = 260$
En 2020, il y a 260 élèves inscrits dans l'école de musique.
$u_2 = 260 \times 0,9 + 35 = 269$
En 2021, il y a 269 élèves inscrits dans l'école de musique.

2. $u_1 - u_0 = 260 - 250 = 10$ et $u_2 - u_1 = 269 - 260 = 9$
Ainsi, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{260}{250} = 1,04$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{269}{260} \approx 1,03$
Ainsi, $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 35$ et $u_0 = 250$.
D'après le tableau de valeur de la calculatrice, la suite (u_n) semble être croissante.



4. 2050 correspond à l'année $2019 + 31$. Grâce à la calculatrice, on trouve $u_{31} \approx 346$.

4 Autres exercices

Exercice plutôt sympathique (que les élèves de l'année dernière n'ont pas trouvé sympathique)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1.

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 \\
u_2 &= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
u_3 &= \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

2. On peut conjecturer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P(n) \ : \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}}$.
  Par conséquent, $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

On a :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2+1}} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+1}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Exercice pas sympathique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{9-8n}{3+8n}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n)\ :\ u_n = \frac{9-8n}{3+8n}$$

- **Initialisation :**

  Pour $n = 0$, on a $\frac{9-8\times 0}{3+8\times 0} = \frac{9}{3} = 3 = u_0$

  Par conséquent, $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k = \frac{9-8k}{3+8k}$.

  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \frac{9-8(k+1)}{3+8(k+1)}$.

On a :

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= \frac{u_k - 2}{2u_k + 5} \\
&= \frac{\dfrac{9-8k}{3+8k} - 2}{2 \times \dfrac{9-8k}{3+8k} + 5} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\dfrac{9-8k-2(3+8k)}{3+8k}}{\dfrac{2(9-8k)+5(3+8k)}{3+8k}} \\
&= \frac{9-8k-2(3+8k)}{3+8k} \times \frac{3+8k}{2(9-8k)+5(3+8k)} \\
&= \frac{9-8k-2(3+8k)}{2(9-8k)+5(3+8k)} \\
&= \frac{9-8k-6-16k}{18-16k+15+40k} \\
&= \frac{3-24k}{33+24k}
\end{aligned}
$$

On peut tout à fait arriver à court d'inspiration ici. Une bonne idée serait de partir de l'autre côté de l'égalité, c'est-à-dire de $\frac{9-8(k+1)}{3+8(k+1)}$, et de montrer qu'on tombe bien sur la même chose !

D'autre part,

$$
\frac{9-8(k+1)}{3+8(k+1)} = \frac{1-8k}{11+8k} = \frac{(1-8k)\times 3}{(11+8k)\times 3} = \frac{3-24k}{33+24k}
$$

Finalement, on en déduit que :

$$
u_{k+1} = \frac{9-8(k+1)}{3+8(k+1)}
$$

Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}}$.