

1. ORTHOGONALITÉ ET PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. 1. ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Définition 1.

- **Deux droites sont dites orthogonales** lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
- **Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux** lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.
- **Une droite est orthogonale à un plan** lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Remarque 1.

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.
- Pour noter que deux objets sont orthogonaux, on pourra utiliser le symbole $\perp$.

Exemple 1.

Propriété 1.

Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Remarque 2.

L'intersection de deux droites perpendiculaires est nécessairement un point alors que l'intersection de deux droites orthogonales peut être vide.

Propriété 2.

- Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Définition 2.

On considère une droite orthogonale à un plan.
 Tout vecteur directeur de cette droite est
 appelé **vecteur normal au plan**.

Exemple 2.

Soit $ABCDE$ une pyramide à base carrée telle que les faces issues de E sont des triangles isocèles.
 On note O le centre du carré $ABCD$.
 Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC) .

1. 2. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Remarque 3.

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace.

Définition 3.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Lorsque l'un des deux vecteurs est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 3.

Propriété 3.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On pose trois points O , A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle H le point de (OA) tel que $(BH) \perp (OA)$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } H \in [OA) \\ -OA \times OH & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 4.

Remarque 4.

Le point H est appelé **projeté orthogonal** de B sur (OA) .

Propriété 4.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et pour tout nombre réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + k\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + k\vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéaire à droite)
- $(\vec{u} + k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + k\vec{v} \cdot \vec{w}$ (linéaire à gauche)
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

Remarque 5.

Le produit scalaire est dit **bilinéaire** car le développement que l'on fait sur le vecteur de gauche peut aussi bien se faire à droite.

Propriété 5. Formules de polarisation

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)\end{aligned}$$

Propriété 6.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration 1.

Exemple 5.

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Montrer que les droites (HB) et (AF) sont orthogonales.

2. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

2. 1. DISTANCE DANS L'ESPACE

Définition 4.

Une **base orthonormée** de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

Remarque 6.

Un **repère orthonormé** est la donnée d'un point (origine) et d'une base orthonormée.

Propriété 7.

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et pour tous points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Propriété 8.

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration 2.

Corollaire 9. Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Exemple 6.**Exemple 7.**

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ et $AB = 2$.

I est le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.

- ① Faire une figure.
- ② Donner, dans le repère $\left(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$, les coordonnées des points I , J et E .
- ③ En déduire le produit scalaire $\vec{JI} \cdot \vec{JE}$.
- ④ Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IJF}$ au dixième de degré près.

2. 2. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Propriété 10.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ admet pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{où } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Remarque 7.

En pratique, on détermine la valeur de d en utilisant l'appartenance d'un point au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration 3.

Exemple 8.

Définition 5.

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Remarque 8.

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont parallèles lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Exemple 9.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A est le point de coordonnées $(1; -5; 7)$. $\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 4 = 0$.

- ① Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$ soit le point A .
- ② Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont orthogonaux.

2. 3. ÉQUATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

Propriété 11.

On considère un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit un point $A(x_A; y_A; z_A)$ appartenant à une droite d de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$M(x; y; z)$ appartient à d si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Démonstration 4.**Définition 6.**

Le système précédent est une **représentation paramétrique** de la droite d (t étant le paramètre de cette représentation).

Remarque 9.

- À chaque valeur de t correspond un point de d .
- Les coefficients du paramètre t sont les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.
- Il existe une infinité de représentations paramétriques d'une droite.

Exemple 10.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; -2; 3)$ et $B(0; 0; 1)$.

- ① Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) .
- ② Les points $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; -5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

3. PROJECTION ORTHOGONALE

3. 1. PROJECTION ORTHOGONALE D'UN POINT SUR UN PLAN OU SUR UNE DROITE

Définition 7.

On considère un plan $\mathcal{P}$ de l'espace dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}$ et un point M extérieur au plan $\mathcal{P}$.
Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ est l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M .

Définition 8.

On considère une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point M extérieur à cette droite.
Le **projeté orthogonal** de M sur d est l'intersection du plan normal à $\vec{u}$ passant par M avec la droite d .

Exemple 11.

Exemple 12.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(5; 1; 3)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

3. 2. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN OU À UNE DROITE

Définition 9.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point.
La **distance du point A au plan $\mathcal{P}$** est la plus petite des longueurs AM où $M \in \mathcal{P}$.

Propriété 12.

Si on note H le projeté orthogonal de A sur la plan $\mathcal{P}$, alors $d(A, \mathcal{P}) = AH$.

Démonstration 5.

Propriété 13.

Soient $\mathcal{P}$ la plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point.
Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de $\mathcal{P}$, alors :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple 13.

Déterminer la distance entre $A(-1; 3; 2)$ et $\mathcal{P} : x - 3y + 2z - 4 = 0$.

Définition 10.

Soit d une droite de l'espace et A un point.

La **distance du point A à la droite d** est la plus petite des longueurs AM où $M \in d$.

Propriété 14.

Si on note H le projeté orthogonal de A sur la droite d , alors $d(A, d) = AH$.

Exemple 14.

Calculer la distance entre $A(2; -1; 2)$ et la droite d dont on donne une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2t + 1 \\ y &= -t \\ z &= t - 1 \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Exemple 15. Type BAC - Métropole 12 mai 2022

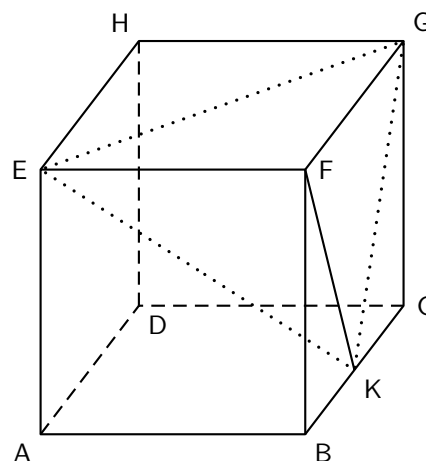
On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



① Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.

② Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGK).

③ Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.

④ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.

⑤ Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9})$.

⑥ Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.

⑦ Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$.

⑧ Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

⑨ On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment [GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.