

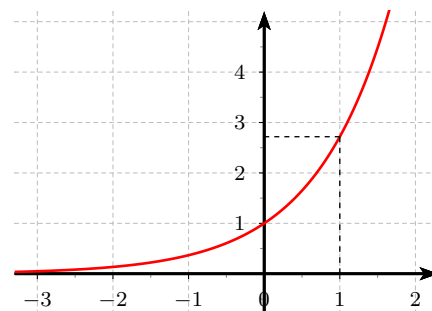
1. RAPPELS SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

Définition 1.

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$.

On la note $x \mapsto \exp(x) = e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$+\infty$



Propriété 1.

2. LOGARITHME NÉPÉRIEN

2.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRE PROPRIÉTÉS

Définition 2.

Pour tout réel a strictement positif, on appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution réelle de l'équation $e^x = a$. Autrement dit, pour tout $a > 0$,

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Remarque 1. Le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.



Propriété 2.

1. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

2. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$

Exemple 1.

Exemple 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+5} = 2$.

2. 2. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Définition 3.

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction f définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x)$.

Propriété 3.

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

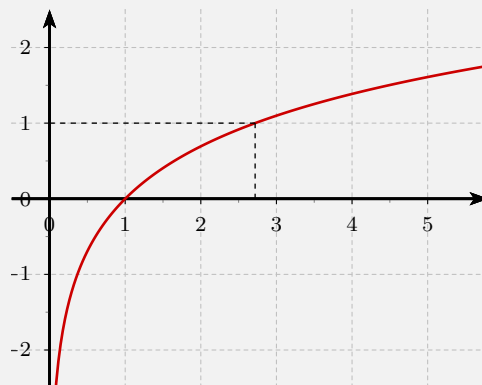
Démonstration 1.**Exemple 3.**

Étudier les variations de la fonction f définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par $f(x) = x \ln(x)$.

Propriété 4.

① La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

② De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

**Démonstration 2.**

Remarque 2.

Propriété 5.

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$a = b \iff \ln(a) = \ln(b) \quad \text{et} \quad a > b \iff \ln(a) > \ln(b)$$

Démonstration 3.

Théorème 6. (Croissances comparées)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel $n > 0$, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Démonstration 4.

Remarque 3.

En $+\infty$, la croissance de x^n (avec $n > 0$) est plus rapide que la croissance de $\ln(x)$.

Propriété 7.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DU LOGARITHME

Propriété 8.

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration 5.

Exemple 4.

Propriété 9.

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

4. $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$

2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

3. $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Démonstration 6.

Exemple 5.

Exemple 6.

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \ln(10000) - \ln(0,1) + \ln(0,01) \quad B = \ln(32) - 7\ln(2) - 4\ln\left(\frac{1}{8}\right) \quad C = 8\ln(\sqrt{3}) + 5\ln(9) - \ln(9\sqrt{3})$$

$$D = \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad E = 2\ln(\sqrt{8}) - 3\ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad F = \frac{\ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$G = \frac{\ln(5) - \ln(10)}{2\ln(\sqrt{2})} \quad H = \frac{\ln(100) - 2\ln(2)}{\ln(5)} \quad I = \frac{\frac{1}{3}\ln(9) - 4\ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(3)}$$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$\text{a. } 1,05^n \geq 1,5 \quad \text{b. } 0,92^n \leq 0,75 \quad \text{c. } 1 - 0,897^n \geq 0,75 \quad \text{d. } 1 - 0,95^n > 0,95$$

3. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 25 \\ 2\ln(x) + \ln(y) = 1 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 3e^x + e^y = 4 \\ e^x - 2e^y = -5 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) = 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) = 0 \end{cases}$$

4. FONCTIONS DE LA FORME $\ln(u)$

Propriété 10.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $(\ln(u))'$, définie sur I , par

$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque 4. On pourra retenir que si $u > 0$, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 7.

Propriété 11.

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que u est strictement positive sur I .

Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ a le même sens de variation que u sur I .

Démonstration 7.

Exemple 8. Type BAC (La Réunion - mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- ① Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- ② (a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.
(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
- ③ (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
(b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
- ④ (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?
(b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(c) Dédire des questions 4.a et 4.b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$$

5. LOGARITHME DÉCIMAL (LIEN AVEC LA SPÉCIALITÉ PHYSIQUE-CHIMIE)

Définition 4.

La fonction **logarithme décimal**, notée $\log$, est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété 12.

- $\log(1) = 0$, $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$ et donc $\log(10^n) = n \log(10) = n$.
- Comme $\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \ln(x)$, on a :

$$\log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x}$$

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
- Pour tout réel $a > 0$, $\log(a^n) = n \log(a)$.

Remarque 5.

$n = \log(a)$ équivaut à $a = 10^n$: le logarithme décimal « compte les puissances de 10 ».

Propriété 13.

Le logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$:

$$\log(x) = y \iff x = 10^y \quad \text{et} \quad \log(10^x) = x$$

Exemple 9. Le pH d'une solution

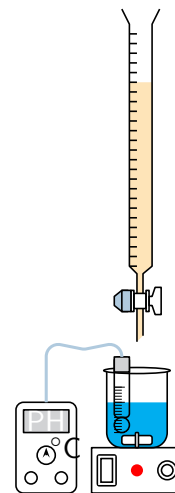
L'acidité et la basicité d'une solution dépendent de sa concentration en ions oxonium H_3O^+ présents dans la solution.

Le pH est une grandeur sans unité qui quantifie le caractère acide ou basique d'une solution. Pour des solutions assez peu concentrées, il est lié à la concentration en ions oxonium par la relation :

$$pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{C^0}\right)$$

où $C^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ est la concentration standard.

$[H_3O^+]$ s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 (10^{-5} par exemple), c'est pourquoi on lui préfère le pH plus simple à utiliser.



- ① Quel est le pH d'une solution d'ammoniaque dont la concentration en ions oxonium est de $3 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$?
- ② M. NICOLAS touille son café avec un pH-mètre qui affiche alors un pH de 5,2.
Quelle est la concentration en ions $[H_3O^+]$ de ce café ?