Chapitre 7 : Vecteurs, droites et plans de l'espace

1. Vecteurs de l'espace

1. 1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.
Soient A et B deux points de l'espace.
On associe à la translation qui transforme A en B le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est caractérisé par :

- Sa direction : la droite (AB) et toutes les droites qui lui sont parallèles.
- Son sens : de A vers B.
- Sa norme : la longueur AB, noté $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarque 1.
• Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul** noté $\overrightarrow{0}$.
• Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété 1. (Parallélogrammes et vecteurs)

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Démonstration 1.
Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $ABDC$ possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

Propriété 2. (Représentant)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. Alors pour tout point A de l'espace, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$.
On dit que $\overrightarrow{AM}$ est le **représentant** de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

Exemple 1.

1. 2. Opérations sur les vecteurs

Définition 2.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On définit la **somme des vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, par $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$, tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Propriété 3.

Relation de Chasles
Pour tous points A, B et C de l'espace, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exemple 2. Compléter les points manquants :
$\overrightarrow{\ldots E}+\overrightarrow{E\ldots}=\overrightarrow{BC}$ $\quad\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{O\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{\ldots P}$ $\quad\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{AG}$

Exemple 3. Dire si l'on peut réduire ou non chacune des sommes suivantes grâce à la relation de Chasles :

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **b.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **c.** $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$
d. $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AC}$ **e.** $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}$ **f.** $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

Définition 3.
La produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un nombre réel k, noté $k\overrightarrow{u}$, est défini en distinguant trois cas.

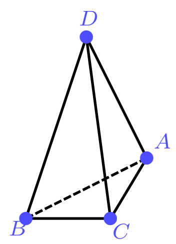
- Si $k=0$ ou $\overrightarrow{u}=0$, alors $k\overrightarrow{u}=0$.
- Si $k>0$ et $\overrightarrow{u}\neq 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ a même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ et sa norme est $k\|\overrightarrow{u}\|$.
- Si $k<0$ et $\overrightarrow{u}\neq 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ a même direction et un sens contraire à celui de $\overrightarrow{u}$ et sa norme est $(-k)\,\|\overrightarrow{u}\|$.

Exemple 4.

Définition 4.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs **colinéaires** si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.

Remarque 2.
• $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{0}=0.\overrightarrow{u}$.
• Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Exemple 5.
On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre.
Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN}=3\overrightarrow{BC}$.
Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



2. Droites et plans de l'espace

2. 1. Caractérisations vectorielles d'une droite et d'un plan

Définition 5.
Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, c'est-à-dire pour lesquels il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque 3.
Une droite (d) de l'espace est donc définie par un point A appartenant à la droite (d) et un vecteur $\overrightarrow{u}$ admettant cette droite (d) comme direction. On dit dans ce cas que $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite (d).

Exemple 6.
Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés.
On considère les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$$

① Faire une figure.

② Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Définition 6.
Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Remarque 4.
Un plan $\mathcal{P}$ est donc défini par un point A appartenant au plan $\mathcal{P}$, et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan $\mathcal{P}$.

Définition 7.
On dit que des points sont **coplanaires** s'il existe un plan qui les contient tous.

Propriété 4.

Trois points A, B et C sont toujours coplanaires.

2. 2. Vecteurs coplanaires

Définition 8.
Soient $\vec{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs distincts et A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.

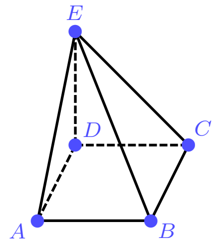
Exemple 7.

Propriété 5. (Caractérisation de vecteurs coplanaires)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Définition 9.
On appelle **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ toute relation de la forme $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Exemple 8.
On considère la pyramide $ABCDE$ ci-contre, de sommet E et dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



3. Positions relatives de droites et de plans

3. 1. Positions relatives de deux droites

Définition 10.
Soit d et d' deux droites de l'espace. Quatre cas sont lors possibles :

d et d' sont **strictement parallèles** : elles n'ont aucun point en commun

d et d' sont **confondues**

d et d' sont **sécantes en un unique point**

d et d' sont **non coplanaires** : elle ne sont ni parallèles, ni sécantes

Exemple 9.

Exemple 10.
On considère un cube $ABCDEFGH$. I, J et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[FG]$ et $[GC]$.
O et K sont deux points tels que $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.
Étudier les positions relatives des couples de droites suivants :

① (IO) et (DK). ② (BJ) et (EF). ③ (JL) et (BC).

3. 2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

> **Définition 11.**
> Soient (d) une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors :
> - Si (d) et $\mathcal{P}$ se coupent en un seul point, on dit que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants.
> - Sinon, on dit que (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles :
>   - — strictement si (d) et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point en commun,
>   - — et sinon, on dit que (d) est incluse dans $\mathcal{P}$, ou encore qu'elle appartient à $\mathcal{P}$.

Exemple 11.

Exemple 12.
On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note :
- I le point de $[AB]$ tel que $AI = \dfrac{2}{3}AB$.
- J le point de $[BC]$ tel que $AJ = \dfrac{1}{4}AC$.
- K le point de $[AD]$ tel que $AK = \dfrac{1}{3}AD$.

Démontrer que la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en un point. On note ce point E.

3. 3. Positions relatives de deux plans

> **Définition 12.**
> Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. Alors :
> - Ces plans peuvent être parallèles :
>   - — strictement si ils n'ont aucun point en commun,
>   - — et confondus si tous les points de $\mathcal{P}$ appartiennent à $\mathcal{P}'$, ou si la réciproque est vraie.
> - Si ces plans ne sont pas parallèles, alors ils sont sécants, et leur intersection est une droite.

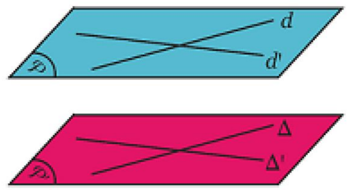
Exemple 13.

Exemple 14.
On considère un cube $ABCDEFGH$. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.
Étudier les positions relatives des couples de plans suivants :

① (AIE) et (BIG). ② (ADI) et (BJC). ③ (HEF) et (BJC).

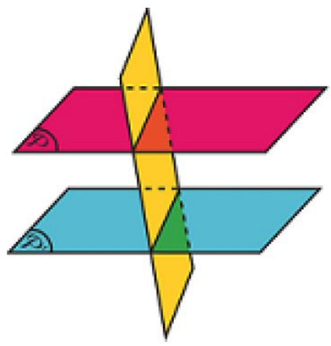
Propriété 6.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si il existe deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ qui sont parallèles à deux droites sécantes de $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui sont directeurs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ en même temps.



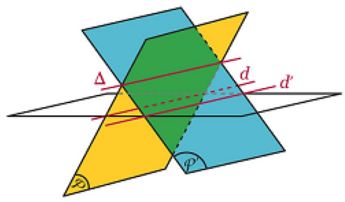
Propriété 7.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles.
Alors tout plan coupant l'un de ces deux plans coupe aussi l'autre, et les droites d'intersections ainsi obtenues sont parallèles l'une à l'autre.

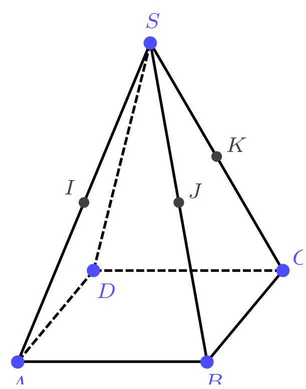


Théorème 8. (Théorème du toit)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Soient (d) une droite incluse dans $\mathcal{P}$ et (d') une droite incluse dans $\mathcal{P}'$, telles que $(d)/\!/(d')$.
Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite (Δ), alors $(\Delta)/\!/(d)/\!/(d')$.



Exemple 15.
On considère la pyramide $SABCD$ ci-contre, de sommet S et de base le parallélogramme $ABCD$. Les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
Déterminer l'intersection de (CIJ) et (ABC).



4. Bases et repères de l'espace

4. 1. Bases de l'espace

Définition 13.
Une **base de l'espace** est la donnée de trois vecteurs non coplanaires qu'on note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

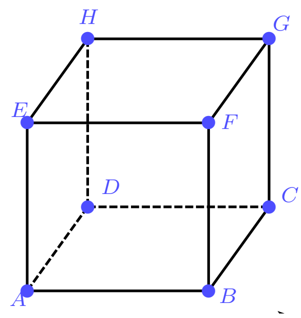
Remarque 5. Les vecteurs d'une bases de l'espace sont donc tous non nuls et sont non colinéaires deux à deux.

Propriété 9. (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On dit que $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans cette base, et on le note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exemple 16.
On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
Prouver que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ dans cette base.



Propriété 10. (Coordonnées de vecteurs particuliers)

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dont les coordonnées sont données dans une base de l'espace. On a alors :

$$(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \qquad \text{Pour tous réels } k, \quad (k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

4. 2. Repères de l'espace

Définition 14.
Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O est d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note alors $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ce repère, et on dit que O en est l'**origine**.

Propriété 11. (Coordonnées, abscisse, ordonnée, cote d'un point)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Alors pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Le triplet $(x; y; z)$ est appelé **coordonnées** de M.
On dit que x est l'**abscisse** de M, que y est son **ordonnée**, et que z est sa **cote**.

Propriété 12.

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. On a alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$.
- Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple 17.
On considère un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les quatre points $A(-3; 6; 7)$, $B(-4; 5; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ et $D(1; -2; 3)$ dans cette base. Prouver que les points A, B, C et D sont coplanaires.