Chapitre 6 : Limites de fonctions

1. Limite d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

1. 1. Limites infinies

Définition 1.
• On dit que la fonction f **admet pour limite** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
• On dit que la fonction f **admet pour limite** $-\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A]$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque 1. On a des définitions similaires pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 1.

Propriété 1.
Soit n un entier naturel non nul.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.

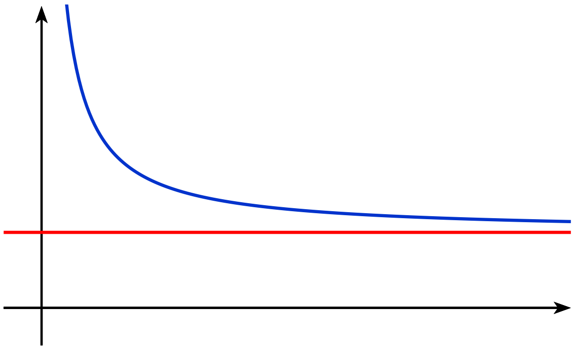
1. 2. Limite finie et asymptote horizontale

Définition 2. On dit que la fonction f **admet pour limite un réel** ℓ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Remarque 2. On a une définition similaire pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Remarque 3.

Exemple 2.

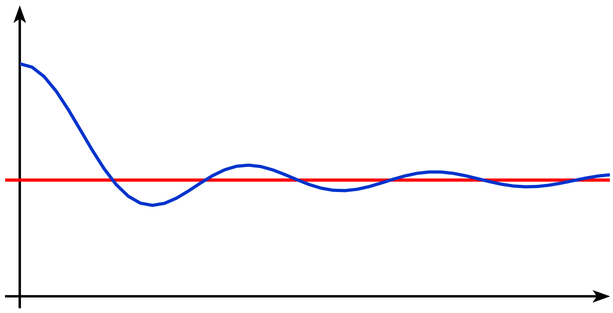


Propriété 2.

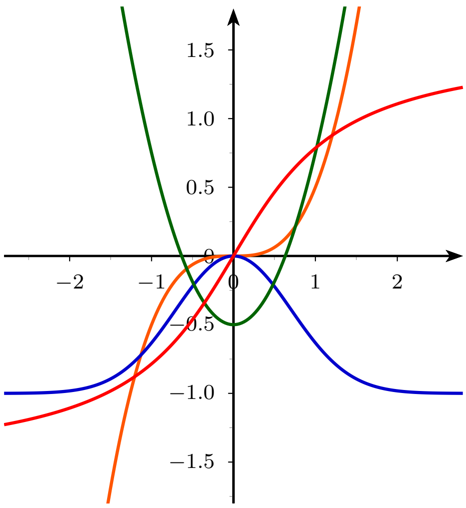
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Définition 3. La droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ ou $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Exemple 3.



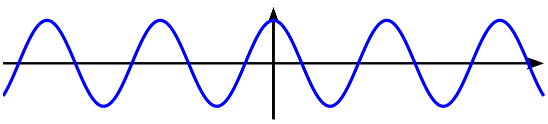
Exemple 4.
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.



① Conjecturer graphiquement les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des quatre fonctions.

② Déterminer les fonctions qui ont une asymptote horizontale en précisant leur équation et s'il s'agit d'une asymptote en $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque 4.

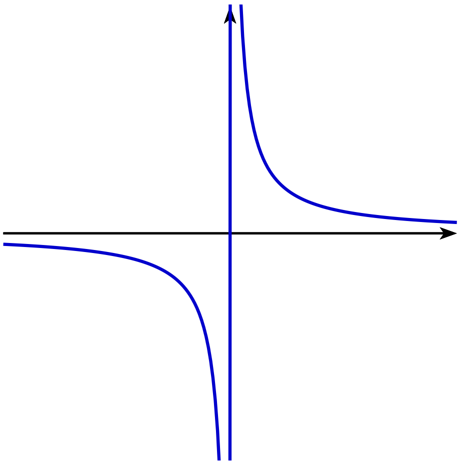


2. Limite d'une fonction en un réel a

2. 1. Limite infinie et représentation graphique

Définition 4.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.
• On dit que la fonction f **admet pour limite** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** a si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
• On dit que la fonction f **admet pour limite** $-\infty$ **lorsque** x **tend vers** a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque 5.



Définition 5.
La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 5.

Propriété 3.

Soit a un nombre réel.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{1}{x-a} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{x-a} = +\infty \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$$

2. 2. Limite finie

Définition 6.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 6.

Propriété 4.

Soit a un nombre réel.

- Si $a \geqslant 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Exemple 7.
On a représenté les variations de la fonction f dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	4

① Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation et s'il s'agit d'une asymptote en $-\infty$ ou $+\infty$.

② Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.

③ Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

3. Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions, et ℓ et ℓ' deux réels.
On note par la suite F.I. pour « forme indéterminée », c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.
Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $-\infty$, en $+\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

3. 1. Limite d'une somme de fonctions

Propriété 5.

$\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Exemple 8.

3. 2. Limite d'un produit de fonctions

Propriété 6.

$\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim g =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim f \times g =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	**F.I.**

On applique la règle des signes pour déterminer si la limite du produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 9.

3. 3. Limite d'un quotient de fonctions

Propriété 7.

$\lim f =$	ℓ	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim g =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' \neq 0$	0 **(*)**	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \dfrac{f}{g} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	**F.I.**	**F.I.**

On applique la règle des signes pour déterminer si la limite du quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.
(*) Dans ce cas, il est important de distinguer si $g(x)$ tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

Remarque 6.
On écrit 0^+ pour indiquer que les valeurs sont aussi proches de 0 que l'on veut en restant positives (idem avec 0^-).

Exemple 10.

Exemple 11.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f aux valeurs demandées :

a. $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

b. $f(x) = (4 - x^2)(3x - 2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c. $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x - 3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$

d. $f(x) = \dfrac{4x}{4 - x}$ en 0 et en 4

Exemple 12. Asymptotes obliques
Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

① Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.

② Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$.

③ Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ : $y = x + 1$?

④ Représenter ce résultat sur un graphique.

3. 4. Formes indéterminées

Exemple 13.

Remarque 7.

Propriété 8.

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme à la même limite que son monôme de plus haut degré.

Démonstration 1.
Soit P une fonction polynôme définie pour tout x réel par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où $a_n \neq 0$ et $n \geqslant 1$. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$P(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right)$$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} = a_n$$

Donc, par produit, P a la même limite en $+\infty$ que $x \mapsto a_n x^n$.
On procède de même pour la limite en $-\infty$.

Propriété 9.

Soit P une fonction polynôme dont $a_p x^p$ est le monôme de plus haut degré, et Q une fonction polynôme dont le monôme de plus haut degré est $a_q x^q$, où p et q sont des entiers naturels. Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_p}{a_q} x^{p-q} \right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{a_p}{a_q} x^{p-q} \right)$$

Exemple 14.

4. Limite et comparaison

4. 1. Limite infinie

Propriété 10.

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x d'un intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, et $a \in I$ (éventuellement $a = \pm\infty$).

• Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

• Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

Exemple 15.

Soit f la fonction définie pour tout $x \geqslant -1$ par $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$.

Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

4. 2. Limite finie

Théorème 11.

Théorème des gendarmes pour les fonctions

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que, pour tout $x \in I$, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Si de plus $a \in I$ (éventuellement $a = \pm\infty$) et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 16.

4. 3. Croissances comparées

Propriété 12.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Remarque 8.

• En $+\infty$, « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance ».

• En $-\infty$, « l'exponentielle décroit plus vite que toute puissance ».

5. Limite d'une composée de fonctions

Définition 7.
Soit f et g deux fonctions.
On appelle **fonction composée** de g par f, notée $f \circ g$.,

$$x \mapsto f(g(x))$$

Exemple 17.

Propriété 13. (admise)

Soient a, b et c trois réels (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).
Si

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to b} f(x) = c$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = c$$

Exemple 18.

Exemple 19.
Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5 - \dfrac{4}{x^2}}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^4$ **c.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{\dfrac{2 - x}{x}}$ **d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^3}$