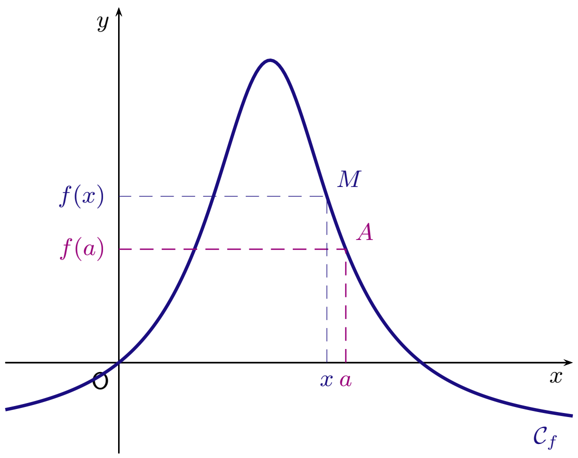
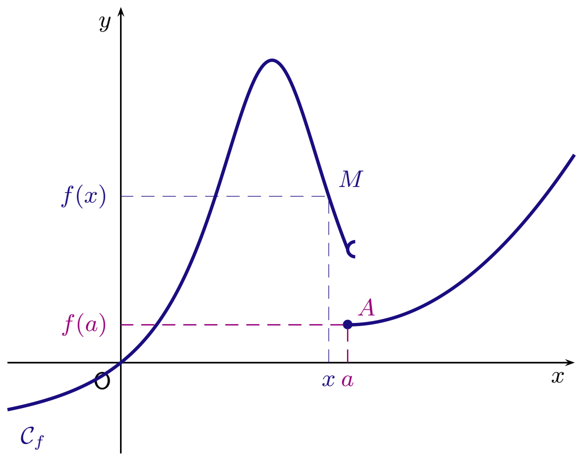
Chapitre 5 : Continuité

1. Notion de continuité

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
- f est **continue en** a lorsque f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.
- f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en a pour tout $a \in I$.

Remarque 1. La représentation graphique d'une fonction continue peut être tracée « sans lever le crayon ».





Exemple 1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{pour } x < 3 \\ x-4 & \text{pour } 3 \leqslant x < 5 \\ -2x+13 & \text{pour } x \geqslant 5 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Propriété 1.

① Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

② Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

③ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

④ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et elle est continue sur $]0; +\infty[$.

Théorème 2.

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

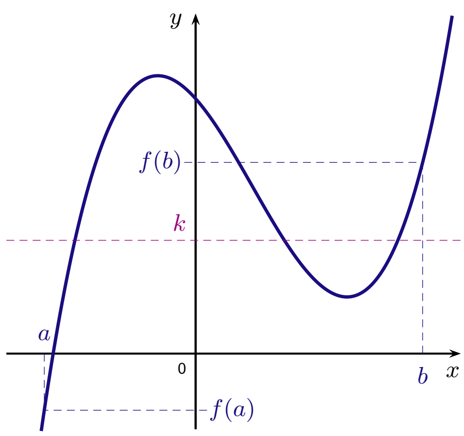
Remarque 2.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

2. 1. Propriété fondamentale des fonctions continues

Théorème 3.

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Remarque 3.
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet <u>au moins</u> une solution dans l'intervalle $[a; b]$

Remarque 4.
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

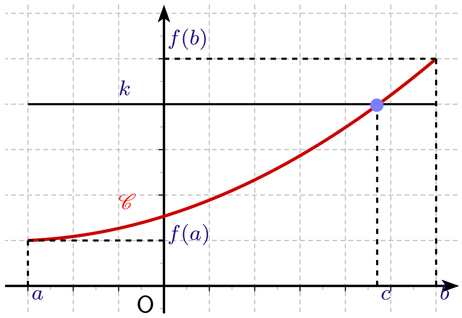
Exemple 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} + x$.
Montrer que, pour tout $k \in [1; 1 + e^3]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

2. 2. Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété 4.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

x	a		c		b
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$f(b)$



Remarque 5. Le tableau de variation ci-dessus permet d'affirmer que l'équation $f(x) = k$ admet c pour unique solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemple 3. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;10]$:

x	-3		10
$f(x)$	-4	$\nearrow$	1

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3;10]$.

Exemple 4. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-4;+\infty[$:

x	-4		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-4;+\infty[$.

Exemple 5. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;+\infty[$:

x	-10		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

① Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-10;+\infty[$.

② Dresser le tableau de signes de f.

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.

① Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;3]$.

② A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de cette solution d'amplitude 10^{-2}.

rad GRAPHEUR

Expressions | Graphique | Tableau

Résultats exacts ○ Régler l'intervalle

x	f(x)
0	-1
1	-1
2	7
3	35
4	95
5	199
6	359
7	587

rad GRAPHEUR

Expressions | Graphique | Tableau

Résultats exacts ○ Régler l'intervalle

x	f(x)
1.4	0.568
1.5	1.25
1.6	2.072
1.7	3.046
1.8	4.184
1.9	5.498
2	7

rad GRAPHEUR

Expressions | Graphique | Tableau

Résultats exacts ○ Régler l'intervalle

x	f(x)
1.83	4.559174
1.84	4.687808
1.85	4.81825
1.86	4.950512
1.87	5.084606
1.88	5.220544
1.89	5.358338

3. Application aux suites

Propriété 5.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $a \in I$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Remarque 6. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$.

Exemple 7.

Propriété 6.

Théorème du point fixe
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même.
Soit une suite (u_n) définie par un réel $u_0 \in I$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque 7. Autrement dit, $f(\ell) = \ell$.
Mais attention, ℓ n'est pas forcément la seule solution de l'équation $f(x) = x$ et il faut parfois départager les candidats.

Exemple 8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$.
On admet que (u_n) converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 3]$. Déterminer la limite de la suite (u_n).