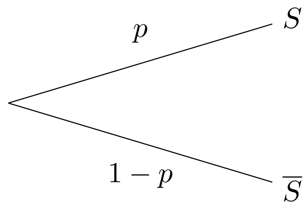
Chapitre 4 : Loi binomiale

1. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition 1.
Soit p un réel appartenant à $[0;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement **succès** S et **échec** $\overline{S}$ et de probabilités respectives p et $1-p$.



Remarque 1. Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

Exemple 1.

Définition 2.
On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S à pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0;1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Exemple 2.

Propriété 1.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance mathématique de X est $E(X)=p$.
La variance de X est $V(X)=p(1-p)$

Démonstration 1.

Remarque 2.
• L'espérance $E(X)$ s'interprète comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.
• La variance mesure la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance $E(X)$.

Définition 3. Soit n un entier naturel non nul.
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

Remarque 3.
• Les conditions identiques et indépendantes sont essentielles et doivent être vérifiées dans chaque situation.
• Il peut être facile de concevoir mentalement l'arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli, mais il n'est pas toujours facile de le tracer !

Exemple 3.

Exemple 4. On tire au hasard successivement et avec remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. A chaque tirage, tirer un as est considéré comme un succès.

① Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

② Représenter la situation par un arbre pondéré.

③ On note X la variable aléatoire associée au nombre d'as tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Loi binomiale

2. 1. Coefficients binomiaux

Définition 4. Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle** de n le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Remarque 4. Par convention, $0! = 1$.

Exemple 5.

Définition 5. Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.
Une **combinaison** de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.
On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

Remarque 5.
- On note également C_n^k le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.
- Les nombres $\binom{n}{k}$ sont également appelés **coefficients binomiaux** et se lisent « k parmi n ».
- Les combinaisons ne font pas apparaître l'ordre des éléments.

Exemple 6.

Propriété 2.

Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. Alors :

① $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

② $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Exemple 7.
- Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?
- Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?
- Pourquoi obtient-on les mêmes résultats ?

2. 2. Définition et premières propriétés

Définition 6.
Soient n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0;1]$.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenu lors de n répétitions identiques et indépendantes d'un schéma de Bernoulli dont p est la probabilité du succès.
On dit alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Remarque 6.
- La loi binomiale de paramètres n et p se note $\mathscr{B}(n;p)$.
- « $X \sim \mathscr{B}(n;p)$ » se lit « X suit une loi binomiale de paramètres n et p ».

Propriété 3.

Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. On a alors

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Démonstration 2.

Exemple 8.

Remarque 7.

Propriété 4.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:
• $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$
• $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$

En particulier, $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^n$, où $q = 1 - p$.

Exemple 9.
On lance six fois une pièce de monnaie équilibrée.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que l'on a obtenu face.

① Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

② Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

③ Déterminer $P(X \leqslant 1)$ et $P(X \leqslant 4)$.

④ Déterminer $P(X \geqslant 5)$.

2. 3. Espérance, variance et écart-type

Propriété 5. .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
• L'espérance de X est $E(X) = np$.
• La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
• L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple 10.

Exemple 11.
On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à $0,12$. On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien parmi les dix.

① Calculer $E(X)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

② Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exemple 12. Exercice Type BAC

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option « Livraison Express ».

① On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

(b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter le résultat.

(c) Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, que 13 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

(d) Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, qu'au moins 16 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

② On prélève au hasard n bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

(a) Démontrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$.

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimum de bons à prélever pour que la probabilité qu'au moins un des bons ait le mention « Livraison Express » soit supérieure à $0,99$.

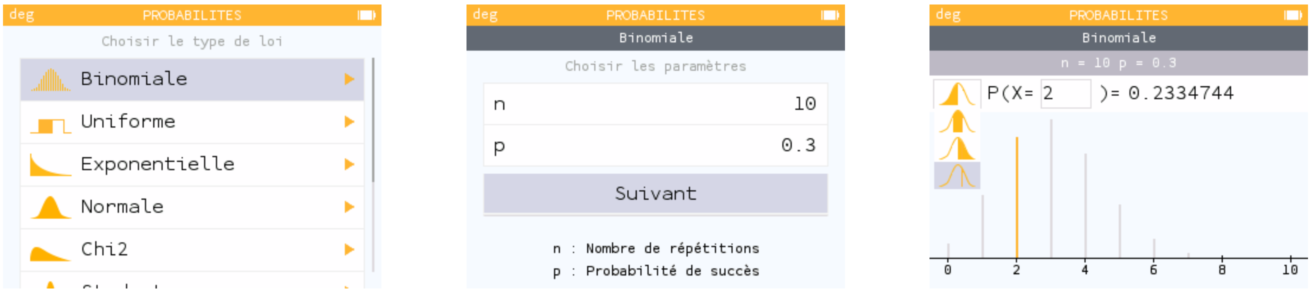
3. Loi binomiale à l'aide de la calculatrice

Exemple 13.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;0,3)$.

① Calculer $P(X=2)$.

② Calculer $P(X \leqslant 7)$.

Pour obtenir des lois de probabilités, on utilise le menu **Probabilités**.



On aurait aussi pu utiliser la formule du cours : $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,3^2 \times (1-0,3)^{10-2} \approx 0,23$.

Si on veut obtenir le tableau avec toutes les probabilités d'une loi binomiale, on utilise le menu **Fonctions**.