Chapitre 3 : Limites de suites

1. Limites finies

1. 1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.
- Une suite (u_n) a pour **limite le réel** ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \in]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$.
- On dit alors que (u_n) est **convergente** vers ℓ.

Remarque 1. Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas.

Propriété 1.

La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Remarque 2.

Exemple 1.

Propriété 2.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

1. 2. Théorème de convergence monotone

Définition 2. On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  M est appelé un **majorant** de (u_n).
- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  m est appelé un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque 3. Une suite majorée (resp. minorée) possède une infinité de majorants (resp.minorants).

Exemple 2.

Propriété 3.

Théorème de convergence monotone

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque 4. Ce théorème permet d'affirmer qu'une suite converge mais ne permet pas de déterminer sa limite.

Exemple 3. Soit u_n la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \qquad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

① Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.

② En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

③ Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

2. Limites infinies

Définition 3.
• Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque 5.

Propriété 4.

① Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

② Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

③ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$

Démonstration 1.

Exemple 4.

Propriété 5.

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 6.
Pour le premier point, on peut le comprendre ainsi : on a une suite croissante et aucun « plafond » pour contenir nos termes, la suite atteint donc des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Démonstration 2.

Exemple 5.
Énumérer toutes les propositions vraies que l'on peut former en utilisant une phrase de chaque colonne.

Si...	**et si...**	**alors...**
• la suite est majorée • la suite est minorée • la suite n'est pas majorée • la suite n'est pas minorée	• la suite est croissante • la suite est décroissante	• la suite diverge • la suite converge

3. Opérations sur les limites

On note par la suite F.I. pour « forme indéterminée », c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

3. 1. Limite d'une somme de suites

Propriété 6.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple 6.

Dans la suite, ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

3. 2. Limite d'un produit de suites

Propriété 7.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si la limite du produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 7.

3. 3. Limite d'un quotient de suites

Propriété 8.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si la limite du quotient est $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple 8.

Méthode en cas de forme indéterminée

Exemple 9. Dans chacun des cas, déterminer la suite de la limite (u_n).

a. $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$

b. $u_n = (3n+1)(-7n+5)$

c. $u_n = \dfrac{3 - \dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}$

d. $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$

f. $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$

g. $u_n = n\sqrt{n} - n$

h. $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i. $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$

j. $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$

k. $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$

l. $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

4. Limites et comparaison

4. 1. Théorème de comparaison

Théorème 9.

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration 3.

Remarque 7.
Malgré son apparence, ce théorème est assez simple. Il dit la chose suivante : si l'on a deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leqslant v_n$, cela signifie que tous les termes de la suite u_n sont *en-dessous* des termes de la suite v_n.
Par conséquent, si u_n tend vers $+\infty$, alors elle impose à v_n de tendre vers $+\infty$.

Exemple 10.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exemple 11.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. 2. Théorème des gendarmes

Théorème 10.

Théorème des gendarmes
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Remarque 8.
Tentons de donner un peu de visualisation à ce théorème.
Si l'on a trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, cela signifie que tous les termes de la suite (v_n) sont *coincés* entre les termes des suites (u_n) et (w_n). Par conséquent, si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors elles imposent à (v_n) de converger vers ℓ.

Exemple 12. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel $n > 1$ par :

$$w_n = \frac{1}{n + \cos(n)}$$

Exemple 13. Étudier la convergence de la suite (z_n) définie pour tout entier naturel n par $z_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$

Remarque 9.