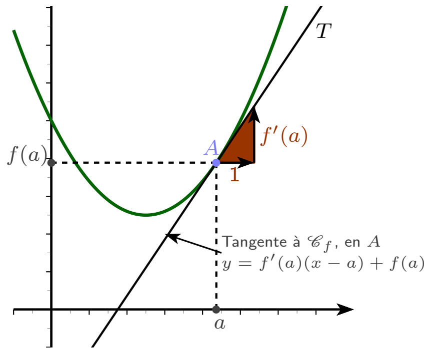
Chapitre 2 : Dérivation et convexité

1. Rappels

1. 1. Tangente à une courbe

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La **tangente** T à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 1.

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 1.
On considère la fonction du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

1. 2. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2.

Fonction	Fonction f	Fonction dérivée f'	f étant dérivable sur
Constante	$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = mx + p$ avec $m,\, p \in \mathbb{R}$	m	$\mathbb{R}$
Carrée	$f(x) = x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	e^x	$\mathbb{R}$
	$f(x) = e^{kx}$	ke^{kx}	$\mathbb{R}$

Exemple 2.

1. 3. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 3.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I (où $k \in \mathbb{R}$)	$(ku)' = ku'$
$u \times v$ est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 3.

1. 4. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème 4.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Exemple 4. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

2. Approfondissements sur les dérivées

2. 1. Dérivée d'une composée de fonction

Définition 2. Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J.
La **fonction composée de** u **par** v, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par :

$$(v \circ u)(x) = v\,(u\,(x))$$

Exemple 5.

Remarque 1. Ne pas confondre $v \circ u$ et $u \circ v$.

Propriété 5.

Soit u une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans J, et v une fonction définie et dérivable sur J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Propriété 6.

Cas particuliers importants

Fonction	Dérivée	Exemple
e^u	$(e^u)' = u' \times e^u$	
$\sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	
u^n	$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$	

Démonstration 1.

Remarque 2.

2. 2. Dérivée seconde

Définition 3.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa fonction dérivée.
Lorsque f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée.
f'' est appelée la **dérivée seconde** de f sur I.

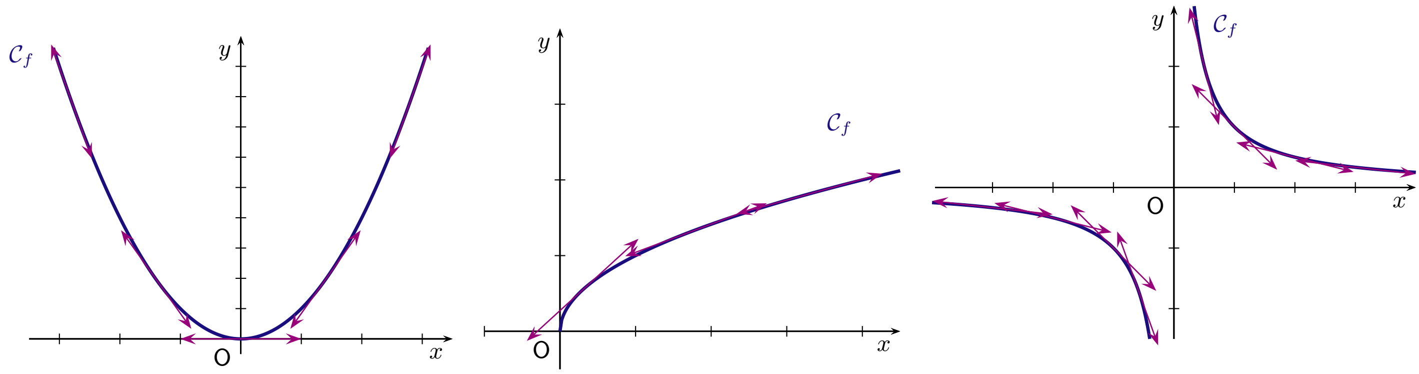
3. Convexité d'une fonction

3. 1. Fonctions convexes

Définition 4.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- La fonction f est **convexe** sur I si, sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

Exemple 6. Parmi les fonctions usuelles, on a :



Remarque 3. Une fonction f est convexe si et seulement si tout segment reliant deux points de la courbe est au-dessus de la courbe.

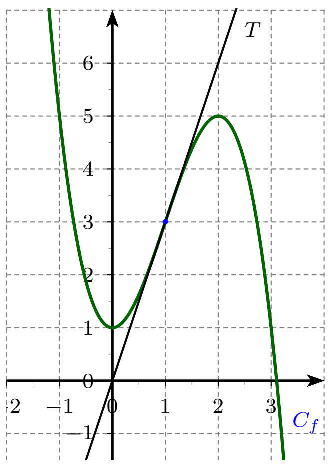
3. 2. Point d'inflexion

Définition 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Le point A de $\mathscr{C}$ est **un point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en A.

Remarque 4. La courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable admet un point d'inflexion en A d'abscisse a quand la fonction f change de convexité c'est-à-dire passe de convexe à concave ou de concave à convexe en a.

Exemple 7.

Soit f la fonction définie sur $[-2; 4]$. On a tracé ci-contre C_f la courbe représentative de la fonction f.
A l'aide du graphique, donner la convexité de f et préciser les coordonnées d'un point d'inflexion éventuel.



4. Convexité d'une fonction et dérivée

4. 1. Convexité et sens de variation de f'

Propriété 7.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur I si, et seulement si, f' est **croissante** sur I.
- f est **concave** sur I si, et seulement si, f' est **décroissante** sur I

Exemple 8.
On considère une fonction f dérivable sur $[-2;5]$ et telle que la dérivée f' admet le tableau de variations suivant :

x	-2		1		3		5
variations de f'		↘	1	↗	3	↘	

Indiquer la convexité de la fonction f sur $[-2;5]$ et l'existence pour la courbe de f de points d'inflexion.

4. 2. Convexité et signe de f''

Propriété 8.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si f'' est négative sur I.

Remarque 5. En effet,

- Dire que f'' est positive sur I signifie que f' est croissante sur I, c'est-à-dire que f est convexe sur I.
- Dire que f'' est négative sur I signifie que f' est décroissante sur I, c'est-à-dire que f est concave sur I.

Remarque 6. ⚠

–

–

Exemple 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x^2$.

① Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f.

② Déterminer f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

③ (a) Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x.

(b) Compléter le tableau ci-dessous :

x	
signe de $f''(x)$	
variations de f'	
convexité de f	

4. 3. Point d'inflexion et dérivée seconde

Propriété 9.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Exemple 10. Reprendre les résultats de **l'exemple 4** et préciser les coordonnées de(s) point(s) d'inflexion éventuel(s).

Exemple 11.
Soit f la fonction définie sur $[0; 18]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 217x + 200$.
On admet que f est croissante sur $[0; 18]$. Soit C_f la courbe représentative de la fonction f.

① Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f.

② Déterminer f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

③ Construire un tableau (4 lignes)
   (a) Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) Donner les variations de la fonction f'.
   (c) En déduire la convexité de f.

④ (a) Préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
   (b) Interpréter graphiquement.

⑤ Interpréter les résultats de la ③ en terme de rythme de croissance.