Chapitre 16 : Loi des grands nombres

1. Inégalités de concentration

1. 1. Inégalité de Markov

Définition 1.
Une variable aléatoire est dite positive ou nulle dans un univers Ω lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Exemple 1.

Théorème 1. **Inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$.
Pour tout réel a strictement positif, on a :
$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration 1.

Remarque 1.
- Il est essentiel que la variable aléatoire X soit positive ou nulle !
- Cette inégalité permet de trouver un majorant, mais pas forcément le plus petit possible.

Exemple 2.

Exemple 3.

1. 2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire.
Pour tout réel a strictement positif, on a :

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration 2.

Remarque 2.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale.
En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieur au majorant obtenu.

Exemple 4.

Exemple 5.

1. 3. Inégalité de concentration

Propriété 3. **Inégalité de concentration** (admise)

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel a strictement positif, on a :

$$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$$

Exemple 6.

2. Loi des grands nombres

Définition 2.
On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes.
On note X_1, X_2, ..., X_n les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.
On note :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

M_n s'appelle la **moyenne empirique** des variables X_1, X_2, ..., X_n.

Propriété 4. **Loi faible des grands nombres**

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel a strictement positif, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant a\right) = 0$$

Démonstration 3.

Remarque 3.
• On dit que M_n **converge en probabilité** vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
• La loi des grands nombres traduit le fait que, plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Remarque 4.
Il existe une propriété similaire dite loi forte des grands nombres, qui dépasse le cadre de la Terminale.

Exemple 7.

Exemple 8.