

1. SINUS ET COSINUS D'UN NOMBRE RÉEL

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

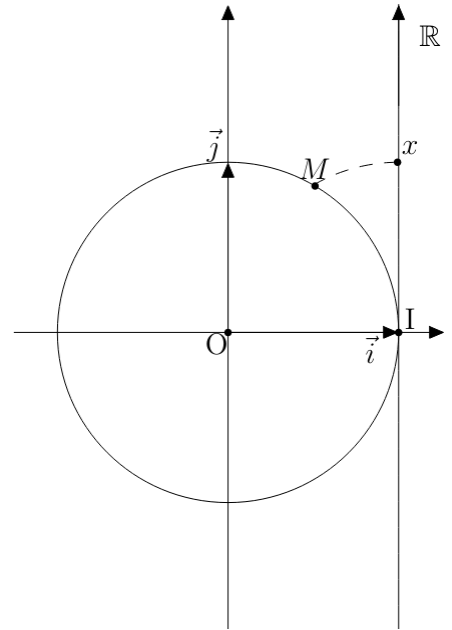
Définition 1.

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Définition 2.

A tout réel x , on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe réel autour de ce cercle. On dit alors que :

- ① M est le point du cercle associé à x .
- ② x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.



Propriété 1.

Soient x et y deux nombres réels.

Alors x et y sont associés à un même point du cercle trigonométrique si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $y - x = 2k\pi$.

On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on note $x = y [2\pi]$.

Exemple 1.

Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

- ① $x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{3\pi}{2}$
- ② $x = \frac{2\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{3}$
- ③ $x = \frac{-5\pi}{12}, y = \frac{43\pi}{12}$

Remarque 1.

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

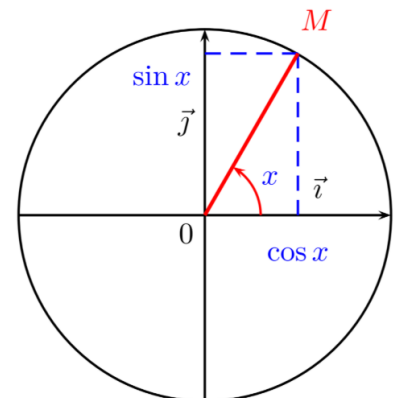
Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
x en radians								

Propriété 2.

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x .

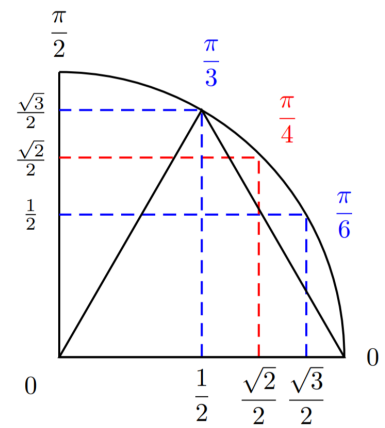
- Le **cosinus** du réel x , noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M .
- Le **sinus** du réel x , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M .

Autrement dit, les coordonnées de M sont $(\cos(x); \sin(x))$.



Propriété 3. (Valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					



Propriété 4.

Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k ,

- ① $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- ② $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- ③ $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- ④ $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- ⑤ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- ⑥ $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$, ce qui s'écrit également $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exemple 2.

- ① Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \quad \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\pi\right) \quad \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

- ② Calculer la valeur exacte des nombres suivants.

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \quad \cos(2024\pi) \quad \cos\left(\frac{2025\pi}{2}\right) \quad \sin\left(\frac{2025\pi}{3}\right)$$

- ③ Soit x un réel tel que $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ et $x \in [-\pi; 0]$. Déterminer $\sin(x)$.

2. ÉTUDE DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Définition 3.

On appelle fonctions sinus (respectivement cosinus) la fonction qui, à tout nombre réel x , associe le nombre $\sin(x)$ (respectivement $\cos(x)$). On note cette fonction \sin (respectivement \cos).

Propriété 5.

Les fonctions \sin et \cos sont périodiques de période 2π (on dit aussi 2π -périodiques). Cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.

Conséquence graphique :

les courbes des fonctions sinus et cosinus sont constituées d'un motif de longueur 2π qui se répète indéfiniment.

Remarque 2.

De manière générale, si T est un réel strictement positif, on dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est T -périodique si, pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

Propriété 6.

- ① La fonction \cos est paire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- ② La fonction \sin est impaire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Remarque 3.

Pour rappel, on dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est paire si, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ et on dit que f est impaire si, pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence graphique :

- ① La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ② La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Ceci, associé à la 2π -périodicité, implique qu'on peut n'étudier ces deux fonctions que sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Or, par définition, il est clair que :

- lorsque x augmente dans $[0; \pi]$, l'abscisse du point M diminue de 1 à -1 donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.
- lorsque x augmente dans $[0; \pi]$, l'ordonnée du point M augmente de 0 à 1 puis diminue de 1 à 0, le maximum 1 étant atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction sinus est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

On a donc, en complétant par parité pour cosinus et par imparité pour sinus, les tableaux de variations suivants :

x	$-\pi$	π
$\cos(x)$		

x	$-\pi$	π
$\sin(x)$		

Théorème 7. (admis)

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Exemple 3.

- ① Montrer que la fonction sinus est concave sur $[0; \pi]$.
- ② En déduire que, pour tout $x \in [0; \pi]$, $\sin(x) \leq x$.
- ③ Conclure que, pour tout réel x , $|\sin(x)| \leq |x|$.

Propriété 8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

Démonstration 1.

Exemple 4.

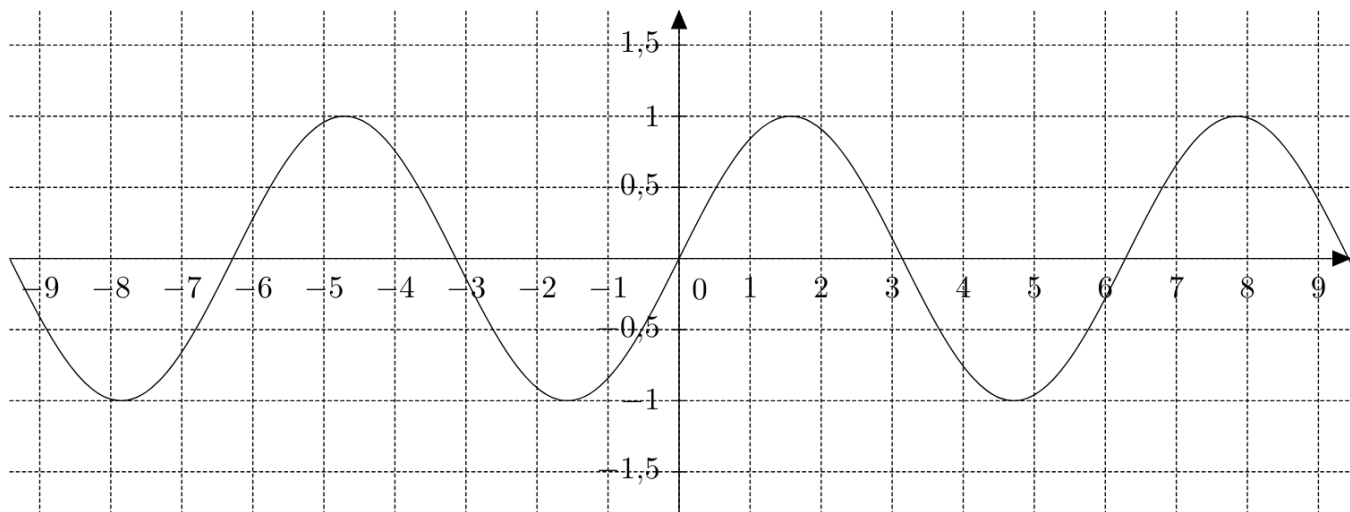
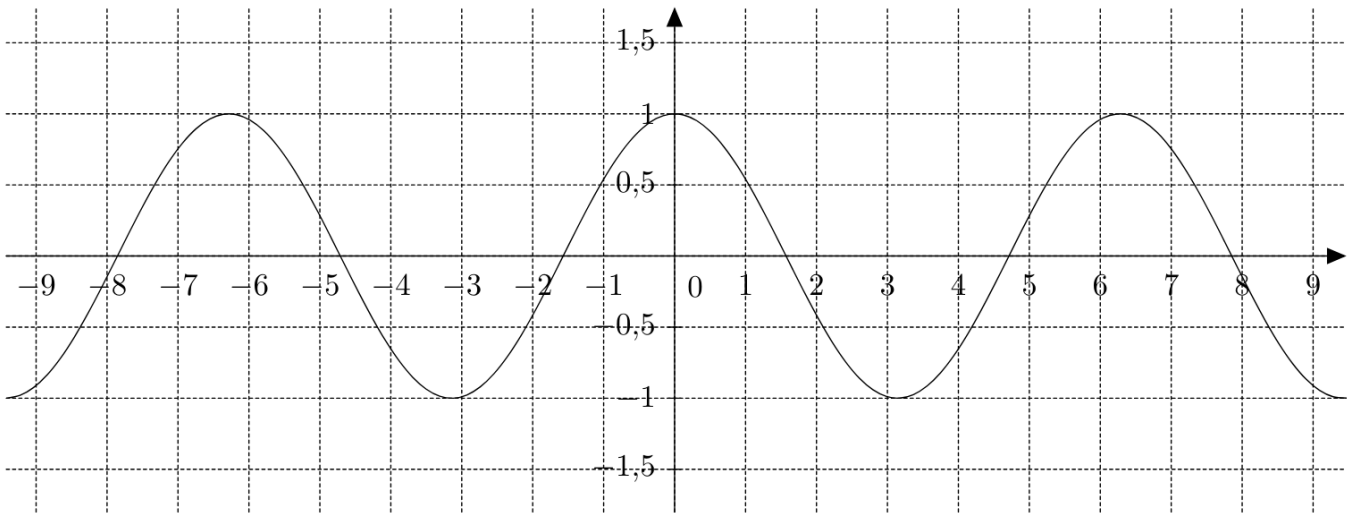
Déterminer les limites suivantes :

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin(7x)}$

Après tant d'attente, les voici enfin, les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus !



3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

3.1. ÉQUATIONS

Propriété 9. (Équation $\cos(x) = \cos(a)$)

Soit un réel $a \in]-\pi; \pi]$.

- Si $a \notin \{0; \pi\}$, alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ possède exactement 2 solutions dans $] - \pi; \pi]$ qui sont a et $-a$. Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $-a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 0$ ou $a = \pi$, alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet une unique solution dans $] - \pi; \pi]$ est qui a . Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 5.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

① $\cos(x) = 0$

② $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$

④ $\cos(x) = \pi$

Propriété 10. (Équation $\sin(x) = \sin(a)$)

Soit un réel $a \in]-\pi; \pi]$.

- Si $a \notin \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$, alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ possède exactement 2 solutions dans $] - \pi; \pi]$ qui sont a et $\pi - a$ si $a > 0$ ou $-\pi - a$ si $a < 0$. Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $\pi - a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = -\frac{\pi}{2}$ ou $a = \frac{\pi}{2}$, alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet une unique solution dans $] - \pi; \pi]$ est qui a . Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 6.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

① $\sin(x) = 0$

② $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

3. 2. INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Principe général :

Pour résoudre une inéquation du type $\sin(x) \leq \sin(a)$ ou $\cos(x) \leq \cos(a)$ sur un intervalle de longueur 2π , on utilise (encore une fois) le cercle trigonométrique.

Exemple 7.

- ① Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{2}$.
- ② Résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'inéquation $2 \sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$.
- ③ Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $2 \sin^2(x) > \cos(x) + 1$.

4. POUR CONTINUER DE S'AMUSER

Voici deux sujets de BAC intéressants pour s'entraîner :

— **BAC Antilles Guyane 2018**

Étude complète d'une fonction avec du sinus et du cosinus (limite, dérivée, variations) et calcul d'une aire à l'aide d'une intégrale.

— **BAC Amérique du Nord 2024**

Suite d'intégrales avec du sinus et du cosinus, variations, signe et convergence de la suite, calcul de sa limite et d'une formule explicite.