Chapitre 14 : Sommes de variables aléatoires

1. Rappels

Propriété 1.

① Espérance d'une variable aléatoire quelconque X :

x_i	x_1	$\ldots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\ldots$	p_n	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) x_i$$
$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n$$

② Variance d'une variable aléatoire quelconque X :

x_i	x_1	$\ldots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\ldots$	p_n	1

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i^2\right) - E(X)^2$$

③ L'écart-type de X vaut :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

④ Interprétations :

- L'**espérance** d'une variable aléatoire est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en **moyenne**, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.
  Elle correspond à une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre cette variable.
- La **variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée, plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne : elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
- En pratique, c'est l'**écart-type** qui est le plus utilisé : il s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations. La variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.

2. Opérations sur les variables aléatoires

2. 1. Produit par un nombre réel et somme de variables aléatoires

Définition 1.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur des univers finis.

$$\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_m\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{e'_1; e'_2; \ldots; e'_m\}$$

qui associent à chaque issue e_i (et e'_i) le réel x_i (et y_i).

x_i	x_1	$\ldots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\ldots$	p_n	1

y_i	y_1	$\ldots$	y_n	Total
$p(Y = y_i)$	q_1	$\ldots$	q_n	1

① **La variable aléatoire** $W = aX$ est la variable aléatoire qui associe à chaque issue e_i le réel $a \times x_i$, avec $P(W = ax_i) = P(X = x_i)$.

w_i	ax_1	$\ldots$	ax_n	Total
$p(W = w_i)$	p_1	$\ldots$	p_n	1

② **La somme des variables aléatoires** X **et** Y est la variable aléatoire $Z = X + Y$ qui associe à chaque issue e_i et e'_i le réel $x_i + y_i$ avec $P(W = w_k)$ qui est la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i$ et $Y = y_i)$ telles que $x_i + y_i = w_k$.

Méthode :

Pour déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$, il faut commencer par calculer les valeurs prises par Z puis, pour chaque somme trouvée, déterminer tous les cas donnant cette somme.

Exemple 1.
On lance deux dés cubiques équilibrés A et B et on note :

- X la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé A, associe comme gain algébrique le numéro obtenu s'il est inférieur ou égal à 4 et -10€ sinon.
- Y la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé B, associe comme gain algébrique 0€ si le numéro obtenu est un multiple de 3, 1€ si c'est le numéro 5 et -5€ sinon.

① Déterminer la loi de probabilité de X et de Y.

② Déterminer la loi de probabilité de $W = 2X$ et $T = 3Y$.

③ Déterminer la loi de probabilité de $Z = X + Y$.

④ Déterminer l'espérance des variables aléatoires X, Y et Z.

Propriété 2. (Variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires. Elles sont **indépendantes** si, quelles que soient les valeurs x_i et y_i, on a :

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_i) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i)$$

2. 2. Propriétés des opérations sur les variables aléatoires

Propriété 3.

① Soit X une variable aléatoire et a un réel. Alors on a :

$$E(aX) = aE(X) \qquad V(aX) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$$

② Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors on a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

③ Plus généralement, si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires, alors on a :

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

④ Soit a et b des réels et X et Y deux variables aléatoires. Alors on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Démonstration 1.

Propriété 4.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

3. Échantillon d'une loi de probabilité

3. 1. Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Définition 2.
Soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire.
Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

Exemple 2.

Définition 3.

① La variable aléatoire **somme** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

② La variable aléatoire **moyenne** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$M_n = \frac{1}{n} S_n$$

Exemple 3.

3. 2. Espérance, variance et écart-type de S_n et M_n

Propriété 5. (Somme S_n)

Soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors :

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

Propriété 6. (Somme M_n)

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, alors :

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

Remarque 1.
Puisque $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$, la variance de la moyenne diminue quand la taille de l'échantillon augmente.
Cette variance quantifie la **fluctuation d'échantillonnage**, c'est-à-dire l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance.

3. 3. Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété 7.

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

① L'espérance de X vaut $E(X) = np$.

② La variance de X vaut $V(X) = np(1 - p)$.

③ l'écart-type de X vaut $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Démonstration 2.