Chapitre 13 : Calcul intégral

Commençons par un extrait de *Calculus made easy* publié en 1910 :

> Pour faire voler en éclats les peurs infondées qui paralysent la plupart des élèves durant ce chapitre, il faut simplement donner la signification, en termes compréhensibles, des deux principaux symboles utilisés dans ce chapitre.
> Ces symboles terrifiants sont :
>
> (1) d qui veut simplement dire « un petit bout de ».
>
> Ainsi, dx se rapporte à un petit bout de x, ou du à un petit bout de u.
> Les mathématiciens trouvent ça plus poli de dire « un élément de » plutôt que « un petit bout de ».
> Vous découvrirez que ces petits bouts (ou éléments) vont pouvoir être considérés comme infiniment petits.
>
> (2) $\int$ qui n'est simplement qu'un long S, et qu'on pourrait appeler « la somme de ».
>
> Ainsi, $\int dx$ signifie la somme de tous les petits bouts de x, ou $\int dt$ signifie la somme de tous les petits bouts de t. Les mathématiciens appellent ce symbole « l'intégrale de ».
> Maintenant, n'importe quel imbécile peut comprendre que si x est considéré comme étant formé de plein de petits bouts, chacun étant appelé dx, alors si on les additionne tous ensemble, on trouve la somme de tous les dx (ce qui est la même chose que x en entier). Le mot « intégrale » signifie juste « en entier ».
> Si vous pensez au temps que dure une heure, on pourrait y penser comme 3600 petits bouts qu'on appelle des secondes.
> L'entièreté de ces 3600 petits bouts ajoutés ensemble forme une heure.
>
> Quand vous voyez une expression qui commence par ce symbole effrayant, vous saurez dorénavant que ça indique que vous allez maintenant réaliser l'opération d'ajouter tous les petits bouts qui sont indiqués par les symboles qui suivent.

1. Intégrale d'une fonction continue positive

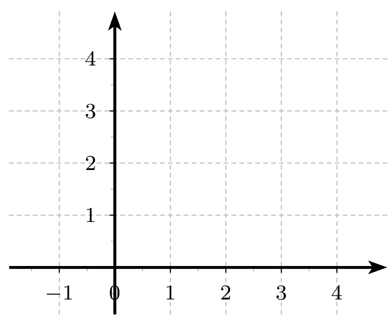
1. 1. Définitions et premières propriétés

Définition 1. Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$un repère orthogonal du plan.
L'**unité d'aire**, notée u.a. est l'aire du rectangle unitaire $OIJK$ avec $I(1;0)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.

Définition 2. Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
On appelle **intégrale de** f **entre** a **et** b l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 1.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».
• La variable x est muette, elle n'intervient pas dans le résultat : on peut donc la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\Big($  $\Big)\,\mathrm{d}$

Exemple 1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$



Définition 3. Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}$$

1. 2. Lien entre intégrale et primitive

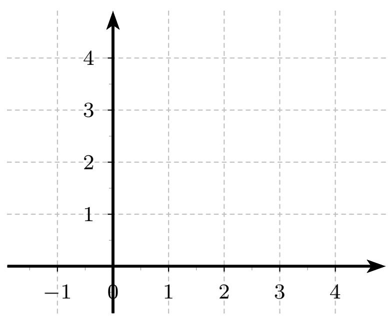
Définition 4.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui, à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 1. (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F_a définie sur $[a;b]$ par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 2.



Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Démonstration 1.

Remarque 2.
• Cette propriété reste valable pour une fonction continue dont le signe n'est pas constant.
• La différence $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.
• Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

Exemple 3.

Méthode :

① Justifier la continuité et le signe constant de f sur $[a;b]$.

② Déterminer une primitive de f, puis calculer l'intégrale.

③ Interpréter le résultat comme l'aire d'un domaine.

Exemple 4.

Calculer et interpréter graphiquement $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\,\mathrm{d}x$

2. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Dans cette partie, a et b sont deux réels quelconques. I est un intervalle contenant a et b.

2. 1. Primitive et intégrale

Théorème 3. (admis)

Toute fonction f continue sur I admet des primitives sur I.

Définition 5.

Lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I, on définit l'**intégrale de f sur l'intervalle** $[a;b]$ par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.

Remarque 3.

⚠ Dans ce cas, on ne peut plus interpréter géométriquement l'intégrale comme l'aire d'un domaine.

Exemple 5.

Méthode :

① Justifier la continuité de la fonction pour justifier l'existence de primitives.

② Déterminer une primitive de f.

③ Utiliser la définition : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 6. Calculer la valeur exacte des intégrale suivantes :

$A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x \qquad B = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x \qquad C = \int_{-2}^{1} 2e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

$D = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} 2e^x \times (e^x + 1)\,\mathrm{d}x \qquad E = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

2. 2. Propriétés de l'intégrale

Propriété 4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration 2.

Propriété 5.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration 3.

Propriété 6. **Linéarité de l'intégrale**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α,

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration 4.

Exemple 7.

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, calculer $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{3}{2}f(x) - x\right)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 7. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration 5.

Interprétation graphique :

Exemple 8.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [-2; 1] \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1; 4] \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $[-2; 4]$, puis calculer $\displaystyle\int_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Définition 6.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.

On appelle **valeur moyenne de** f sur $[a; b]$ le réel

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique :

Exemple 9.
Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = (2 - x)(x - 1)$ sur $I = [-1; 0]$

2. $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1; 1]$.

2. 3. Inégalités et intégrales

Propriété 8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Démonstration 6.

Remarque 4.
La réciproque est fausse !

Exemple 10.
Déterminer sans calculatrice le signe de $\displaystyle\int_{-2}^{0} (e^x + e^{-x})\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

Corollaire 9.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration 7.

Remarque 5.

⚠ La réciproque est fausse !

Propriété 10.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

Démonstration 8.

Interprétation graphique :

Méthode : Pour démontrer une inégalité ou un encadrement d'une intégrale, on doit :

① Déterminer une inégalité ou un encadrement vérifiée par la fonction intégrée sur l'intervalle $[a;b]$.

② Intégrer l'inégalité ou l'encadrement obtenu.

③ Calculer les intégrales pour conclure.

Exemple 11.

Démontrer que $\dfrac{8}{9} \leqslant \displaystyle\int_0^8 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 8$.

3. Intégration par parties

Propriété 11.

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration 9.

Remarque 6.
• Le choix des fonctions u' et v est important pour permettre de continuer les calculs. Il ne faut pas oublier que certaines fonctions sont plus faciles à intégrer que d'autres (exponentielle, fonctions polynômes).
• On peut parfois remarquer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x$ pour effectuer une intégration par parties avec $u'(x) = 1$.

Exemple 12.

Exemple 13.

Méthode : Lorsque le calcul d'une intégrale n'est pas possible directement avec une primitive, on peut utiliser une intégration par parties.

① Choisir judicieusement u' et v en justifiant la dérivabilité et la continuité des fonctions.

② Utiliser la formule d'intégration par parties.

③ Calculer les intégrales pour conclure.

Exemple 14. Exercice type BAC

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

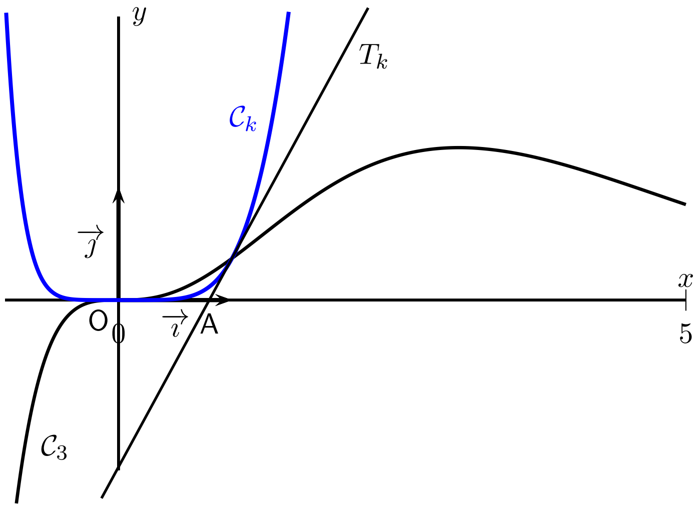
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5} \; ; \; 0\right)$.



① (a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

(c) A l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

② (a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

(b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

③ Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

④ (a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.

(b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

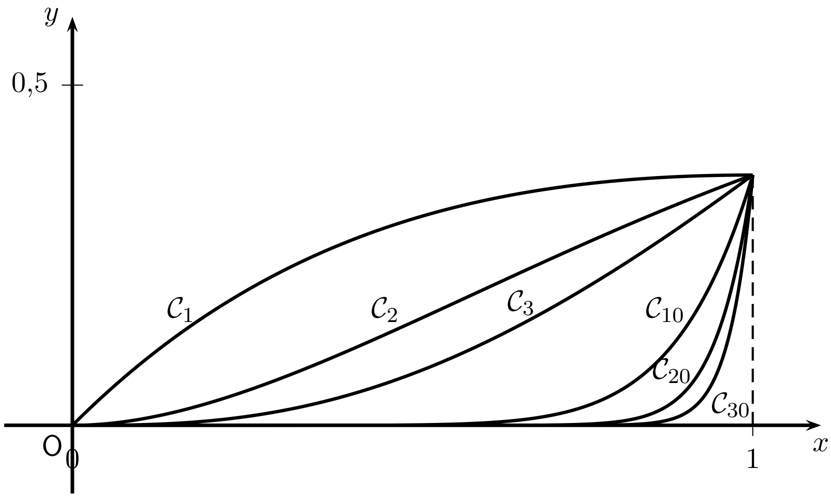
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

① Calculer I_1.

② *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$,
$\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, $\mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$.