

## 1. CARDINAL D'ENSEMBLES

### 1. 1. ENSEMBLE FINI ET CARDINAL

**Définition 1.** Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.  
Le nombre d'éléments de  $E$  est appelé **cardinal** de  $E$  et est noté  $\text{Card}(E)$ .

**Remarque 1.**

- En particulier,  $\text{Card}(\emptyset) = 0$ .
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle  $[0; 1]$ , etc.

**Exemple 1.**

### 1. 2. PRINCIPE ADDITIF

**Définition 2.** Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont **disjoints** lorsque  $A \cap B = \emptyset$ .

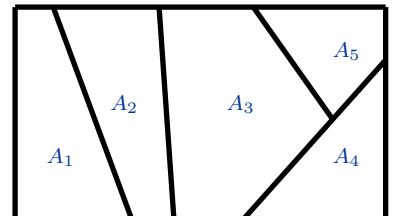
Propriété 1.

Soit  $A_1, A_2, \dots, A_p, p$  ensembles finis deux à deux disjoints. On a alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

**Remarque 2.**

- Malgré son apparence complexe, cette formule est assez simple à comprendre. Considérons l'ensemble ainsi partitionné avec  $\{A_1; \dots; A_5\}$ . La formule de la proposition précédente nous dit que l'on peut calculer le cardinal de l'ensemble soit d'un coup ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5$ ), soit en additionnant le cardinal de chaque ensemble ( $A_1, A_2, \dots, A_5$ )
- En particulier, si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux ensembles finis et disjoints, on a :



$$\text{Card}(A_1 \cup A_2) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2)$$

**Exemple 2.**

### 1. 3. PRINCIPE MULTIPLICATIF

**Définition 3.** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides.  
Le **produit cartésien** de  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , est l'ensemble des couples  $(x; y)$  où  $x \in A$  et  $y \in B$ .

**Remarque 3.**

Le produit cartésien de  $A$  par lui-même (c'est-à-dire  $A \times A$ ) est noté  $A^2$ .  
Plus généralement, le produit de  $A$  par lui-même  $n$  fois, avec  $n > 1$ , se note  $A^n$ .

**Exemple 3.**

Propriété 2.

① Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2, et  $E_1, E_2, \dots, E_k$ ,  $k$  ensembles finis non vides. Alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k)$$

② En particulier, pour  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides, on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

③ Soient  $A$  un ensemble fini non vide et  $n$  un entier naturel non nul. Alors

$$\text{Card}(A^n) = \text{Card}(A)^n$$

**Démonstration 1.**

**Remarque 4.**

Le signe  $\times$  dans  $\text{Card}(E \times F)$  désigne le produit cartésien des ensembles  $E$  et  $F$ , tandis que celui dans  $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$  désigne bien la multiplication de deux entiers.



**Exemple 4.**

### Propriété 3.

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels non nuls et  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$ .  
Le nombre de  $k$ -uplets de  $E$  est  $n^k$ .

**Exemple 5.** Dans la chanson *Digicode* d'Oldelaf, l'artiste affirme ceci :

*« Il y avait pour entrer juste un digicode  
Deux lettres et dix chiffres incommodes  
Un détail que t'avais sûrement oublié  
4 milliards de possibilités »*

Le calcul est-il correct ?

## 2. ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

### 2. 1. FACTORIELLE D'UN ENTIER NATUREL

**Définition 4.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle **factorielle** de  $n$  le nombre

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

**Remarque 5.** Par convention,  $0! = 1$ .

**Exemple 6.**

### 2. 2. ARRANGEMENTS D'UN ENSEMBLE

**Définition 5.** Soient  $A$  un ensemble fini non vide à  $n$  éléments et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ .  
Un **arrangement** de  $k$  éléments de  $A$  (ou  **$k$ -arrangement**) est un  $k$ -uplet d'éléments distincts de  $A$ .  
On note  $\mathcal{A}_n^k$  le nombre de  $k$ -arrangements de  $A$ .

**Remarque 6.**

Un arrangement de  $A$  peut être vu comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de  $A$ .

**Exemple 7.**

### Propriété 4.

Soient  $A$  un ensemble fini non vide à  $n$  éléments et  $k$  un entier naturel tel que  $k \leq n$ .  
Le nombre de  $k$ -arrangements de  $A$  est égal à :

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

**Démonstration 2.**

**Exemple 8.**

## 2. 3. PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE

**Définition 6.** Soit  $A$  un ensemble fini non vide à  $n$  éléments.  
Une **permutation** de  $A$  est un  $n$ -uplet d'éléments distincts de  $A$ .

**Exemple 9.**

Propriété 5.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à  $n$  éléments est  $n!$ .

**Démonstration 3.**

**Exemple 10.**

- Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à « Pile ou Face » 7 fois ?
- De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?

### 3. PARTIES D'UN ENSEMBLE ET COMBINAISONS

#### 3.1. PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

**Définition 7.** Une **partie** d'un ensemble  $A$  est un sous-ensemble de  $A$ .  
L'ensemble des parties de  $A$  est noté  $\mathcal{P}(A)$ .

**Remarque 7.**

- $\mathcal{P}(A)$  est donc un ensemble d'ensembles.
- On a toujours  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ .

**Exemple 11.**

Propriété 6.

Soit  $A$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Le nombre de parties de  $A$  est égal à  $2^n$ , c'est-à-dire

$$\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$$

**Démonstration 4.**

#### 3.2. NOMBRE DE COMBINAISONS ET PROPRIÉTÉS

**Définition 8.** Soit  $A$  un ensemble fini à  $n$  éléments et  $k$  un entier naturel tel que  $k \leq n$ .  
Une **combinaison** de  $k$  éléments de  $A$  est une partie de  $A$  de cardinal  $k$ .  
On note  $\binom{n}{k}$  le nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n$ .

**Remarque 8.**

- On note également  $C_n^k$  le nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n$ .
- Les nombres  $\binom{n}{k}$  sont également appelés **coefficients binomiaux** et se lisent «  $k$  parmi  $n$  ».
- Les combinaisons ne font pas apparaître l'ordre des éléments.

**Exemple 12.**

Propriété 7.

Soit  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $k \leq n$ . Alors :

$$\textcircled{1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\textcircled{2} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\textcircled{3} \text{ Relation de Pascal : si } 1 \leq k \leq n-1, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration 5.

**Remarque 9.** Il est possible de représenter les coefficients binomiaux à l'aide de la formule  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  sous la forme d'un **triangle de Pascal** illustré ci-dessous :

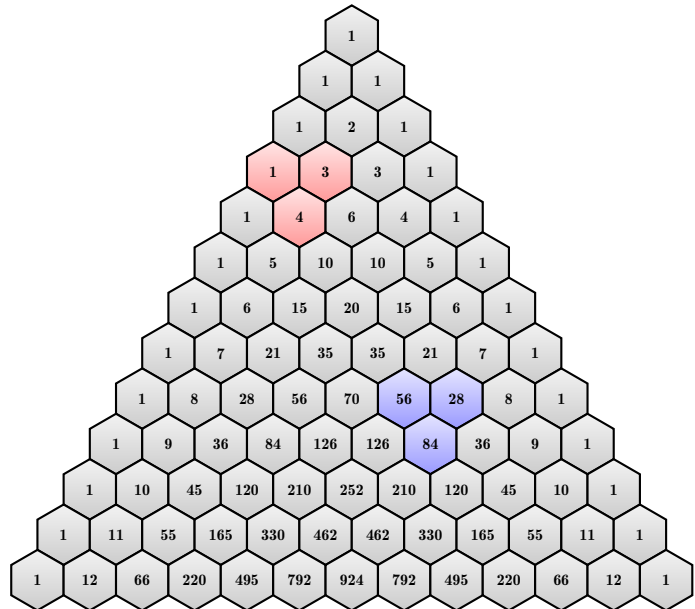
$$\begin{array}{cccc}
 & & \binom{0}{0} & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 \dots & & & & & & & 
 \end{array}$$

Et en plus beau, ça donne ça :

On a par exemple :

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1}$$

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$$



**Propriété 8.**

Soit  $n$  un entier naturel. Alors

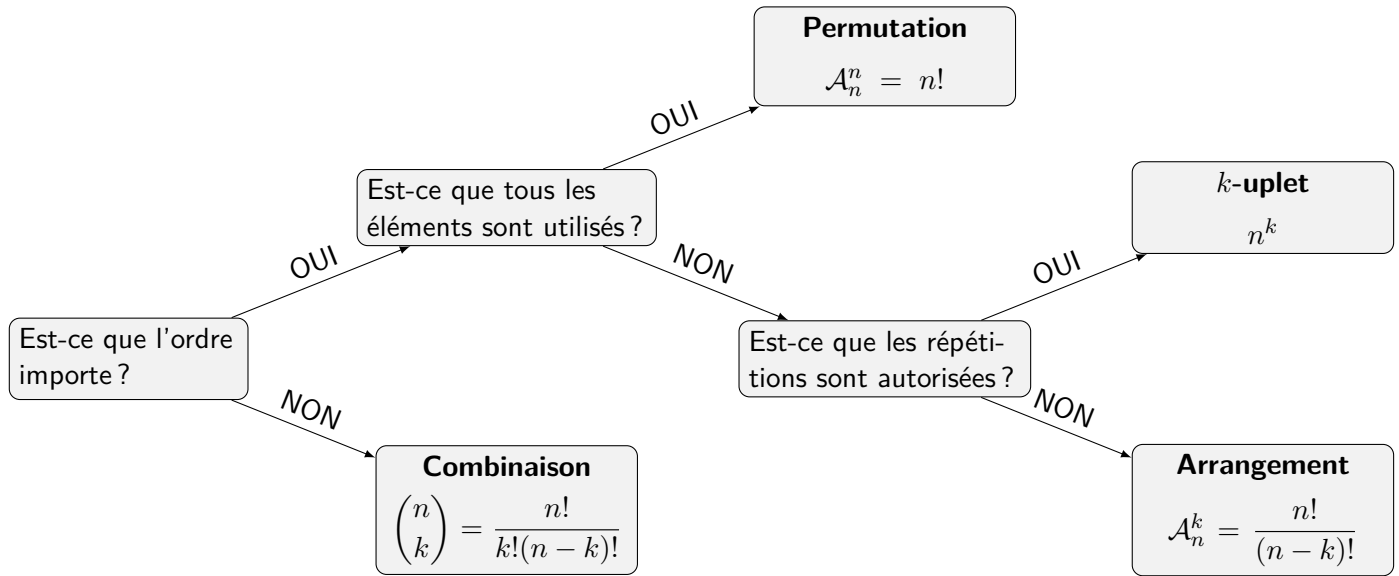
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

♣ **Démonstration 6.**

**Exemple 13.**

- Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?
- Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?
- Pourquoi obtient-on les mêmes résultats ?

## 4. SCHÉMA RÉCAPITULATIF



## 5. COMMENT RETROUVER LA FORMULE DU TRIANGLE DE PASCAL ?

Tiré de l'article du CNRS « Les formules magiques ».

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Un village de  $n$  habitants souhaite élire  $k$  personnes au conseil municipal.

Bob, un citoyen du village, se demande combien de conseils municipaux il est possible de constituer.

Bien sûr, au vu de la définition des coefficients binomiaux, il y a en a  $\binom{n}{k}$ .

Mais dans chacun de ces conseils municipaux :

- soit Bob fait partie du conseil municipal et, dans ce cas-là, il reste à élire  $k-1$  personnes parmi les  $n-1$  habitants restants. Cela fait  $\binom{n-1}{k-1}$  possibilités.
- soit Bob ne fait pas partie du conseil et, dans ce cas-ci, il faut élire  $k$  conseillers municipaux parmi les  $n-1$  habitants restants. Cela fait  $\binom{n-1}{k}$  possibilités.

On retrouve alors la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

nombres de conseils municipaux possibles = nombres de conseils municipaux sans Bob + nombres de conseils municipaux avec Bob