

1. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1. 1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = f$

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit que la g est solution de l'**équation différentielle** $y' = f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a :

$$g'(x) = f(x)$$

Exemple 1.

Définition 2.

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f , sa dérivée f' et la variable x .

Attention, l'**inconnue** de cette équation est la **fonction** f elle-même (et pas x).

Exemple 2.

Exemple 3.

- ① Soit (E_1) l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour x réel.
Déterminer une solution de (E_1) puis une autre solution de (E_1) qui s'annule en 0.
- ② Soit (E_2) l'équation différentielle $y' - 2y = 4$, pour x réel.
Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de (E_2) .
- ③ Soit (E_3) l'équation différentielle $xy' + y = 6x + 1$.
Déterminer les réels a et b pour que la fonction $x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E_3) .

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $y' = ay + b$ ET $y' = ay + f$

2.1. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay$

Propriété 1.

Soit a un réel.

L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} \quad \text{où } C \text{ est un réel}$$

♣ Démonstration 1.



Méthode :

- On écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = ay$.
- On utilise la forme générale des solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ avec C réel.
- On calcule C à l'aide de la condition initiale.

Exemple 4.

Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 0$ avec la condition initiale $y(2) = 1$.

Exemple 5.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 0$

b. $y' - 3y = 0$

c. $y' = 2y$

d. $3y' = y$

e. $y' = \frac{y}{5}$

2. 2. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$ AVEC $a \neq 0$

Propriété 2.

La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$).
Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration 2.

Propriété 3.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{où} \quad \begin{cases} f \text{ est la solution générale de l'équation } y' = ay \\ g \text{ est la solution particulière constante de l'équation } y' = ay + b \end{cases}$$

Remarque 1.

L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire 4.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 6.

On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 3$.

- ① Déterminer la solution particulière constante de l'équation (E) .
- ② Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.
- ③ En déduire la forme générale des solutions de l'équation (E) .
- ④ Déterminer l'unique solution de (E) telle que $y(0) = -1$.

2. 3. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + f$ AVEC $a \neq 0$

Propriété 5. (admis)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (a et b deux réels) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{où} \quad \begin{cases} f \text{ est la solution générale de l'équation } y' = ay \\ g \text{ est une solution particulière de l'équation } y' = ay + f \end{cases}$$

Exemple 7.

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = e^x$, pour x réel.

3. APPLICATIONS EN ♥ PHYSIQUE-CHEMIE ♥

3. 1. DÉCROISSANCE RADIOACTIVE

Exemple 8.

Le principe de la datation au carbone 14 repose sur le fait qu'il se renouvelle constamment chez les êtres vivants et que sa proportion reste donc stable tout au long de leur vie. A leur mort, son assimilation cesse et la carbone 14 se désintègre, sa proportion commence donc à diminuer.

Le nombre d'atomes de carbone 14 existant à l'instant t (en année) dans un échantillon de matière organique est noté $N(t)$, avec $t \geq 0$. On pose $N(0) = N_0$ et on admet que N est solution de l'équation différentielle :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

avec $\lambda = 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$ (constante radioactive du carbone 14).

- ① Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 et de t .
- ② Déterminer une valeur arrondie à l'unité de la demi-vie $t_{1/2}$ de l'atome de carbone 14, c'est-à-dire le temps au bout duquel la moitié des atomes s'est désintégrée.
- ③ Des archéologues ont trouvé dans la grotte Chauvet, en Ardèche, des fragments d'os de renne, dont la teneur en carbone 14 représente 2,1% de celle d'un fragment d'os actuelle, pris comme témoin. Déterminer l'âge arrondi à l'unité de ces fragments.



3. 2. LOI DE REFROIDISSEMENT DE NEWTON

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t . f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t en heures.

- ① Déterminer $f(t)$ pour $t \geq 0$, sachant que, pour $t = 0$, la température de l'objet est 220°C .
- ② On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

- (a) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}^+ .
 - (b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en faire pour l'objet ?
 - (c) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous.
- ③ (a) Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est de 50°C . On laissera apparents les traits de construction.
- (b) Retrouver ce résultat par le calcul.

