Chapitre 10 : Primitives

1. Primitives d'une fonction

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction F est **une primitive** de la fonction f sur I si, pour tout réel x de I, on a :

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple 1.

Théorème 1. (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur I. Deux primitives de f sur I ne diffèrent que d'une constante.

♣ **Démonstration 1.**

Propriété 3.

Soit f une fonction admettant F comme primitive sur I.
Alors la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une autre primitive de f sur I et toutes les primitives de f sur I sont de cette forme.

Exemple 2.

① Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) =$ .... est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$.
TOUTES les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$x \mapsto$ .... (avec k réel)

② Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) =$ .... est UNE primitive de g sur $\mathbb{R}$ car $G' = g$.
TOUTES les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$x \mapsto$ .... (avec k réel)

③ Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3$.
Alors la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) =$ .... est UNE primitive de h sur $\mathbb{R}$ car $H' = h$.
TOUTES les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$x \mapsto$ .... (avec k réel)

④ Soit k définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
Alors la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) =$ .... est UNE primitive de k sur $\mathbb{R}$ car $K' = k$.
TOUTES les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$x \mapsto$ .... (avec k réel)

⑤ Soit l définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
Alors la fonction L définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x) =$ .... est UNE primitive de l sur $\mathbb{R}$ car $L' = l$.
TOUTES les primitives de l sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$x \mapsto$ .... (avec k réel)

2. Recherche des primitives d'une fonction

2. 1. Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par...	Une primitive F est donnée par...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier différent de -1 et 0)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x\ln(x) - x$	sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarque 1.

• Dans la pratique, il suffit de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles et d'ajuster ensuite les coefficients multiplicateurs.

• Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

f est de la forme...	Une primitive F est donnée par...	Validité
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$	
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annulant pas sur I si $n < 0$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$ sur I

2. 2. Linéarité des primitives

Théorème 4.

• Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
• Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

Démonstration 2.

Exemple 3.

Exemple 4.
Les exercices du bac ne proposent pas toujours de calculer une primitive. Il suffit souvent de montrer qu'une fonction donnée F est la primitive d'une autre f. La méthode dans ce cas est de dériver F et de montrer que l'on retrouve f.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

① Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

② Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Exemple 5.
Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Remarque 2.
Il existe des fonctions continues dont on ne connait pas de forme explicite de primitive. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue donc admet des primitives mais on ne sait pas les exprimer sous forme explicite.