BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Avril 2026

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation d'une calculatrice **en mode examen** est autorisée.
Écrire le nom de votre professeur de mathématiques en haut à gauche sur votre première copie.
Vous veillerez à bien numéroter les pages de vos copies.
Il n'est pas nécessaire de rendre le sujet.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Il comporte 5 pages.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

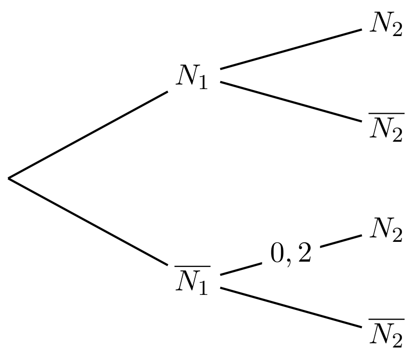
Exercice 1 (5 points)

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante : On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2. On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

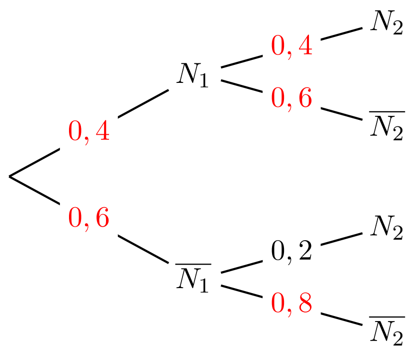
PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



(a) Expliquer pourquoi la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est $0,2$.
Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a donc 1 boule noire et 4 boules blanches dans l'urne U_2.
La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc égale à $P_{\overline{N_1}}(N_2) = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

(b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessus, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.
$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$
La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0,16$.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0,28$.
$\{N_1 ; \overline{N_1}\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(N_2) &= P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N_1} \cap N_2) \\
&= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(N_2) \\
&= 0,4 \times 0,4 + 0,6 \times 0,2 \\
&= 0,28
\end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc bien égale à $0,28$.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1.
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.
On cherche à calculer $P_{N_2}(\overline{N_1})$.

$$P_{N_2}(\overline{N_1}) = \frac{P(N_2 \cap \overline{N_1})}{P(N_2)} = \frac{0,12}{0,28} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 sachant qu'on a pioché une boule noire dans l'urne U_2 est environ égale à $0,43$.

PARTIE B

Dans cette partie, l'expérience aléatoire précédente est répétée 20 fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à $0,28$ et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.
Chaque boule prélevée dans l'urne U_2 est une épreuve de Bernoulli de succès S : « la boule tirée est noire » de probabilité $p = 0,28$. Les urnes étant remises en configuration initiale entre chaque expérience, les tirages sont identiques et indépendants. X comptant le nombre de succès, la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,28$.

2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
$X \sim \mathscr{B}(20; 0,28)$ donc $E(X) = np = 20 \times 0,28 = 5,6$.
Si l'on répète un grand nombre de fois ces 20 tirages, on tirera en moyenne $5,6$ boules noires dans l'urne U_2 à chaque fois.

3. Calculer la probabilité de tirer exactement 6 boules noires dans l'urne U_2.
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

$$P(X = 6) = \binom{20}{6} \times 0,28^6 \times (1 - 0,28)^{20-6} \approx 0,19$$

La probabilité de tirer exactement 6 boules noires dans l'urne U_2 est environ égale à $0,19$.

4. Donner la valeur de $P(X > 3)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.
A l'aide de la calculatrice, on trouve que $P(X > 3) = P(X \geqslant 4) \approx 0,85$.
La probabilité de tirer au moins 4 boules noires dans l'urne U_2 est environ égale à $0,85$.

PARTIE C

Dans cette partie, l'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, où n désigne un entier naturel non nul.
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.

1. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $1-0,72^n \geqslant 0,9$.

$$\begin{aligned}
1-0,72^n \geqslant 0,9 &\iff -0,72^n \geqslant -0,1 \\
&\iff 0,72^n \leqslant 0,1 \\
&\iff \ln(0,72^n) \leqslant \ln(0,1) && \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0;+\infty[\\
&\iff n\ln(0,72) \leqslant \ln(0,1) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} && \text{car } \ln(0,72) < 0
\end{aligned}$$

De plus, $n \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \approx 7,01$ donc le plus petit entier recherché est $n = 8$.

2. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.
Dans cette partie, Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,28$.
On remarque que la probabilité d'obtenir au moins une boule noire est égale à :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) &= 1 - P(Y = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} \times 0,28^0 \times (1-0,28)^{n-0} \\
&= 1 - 0,72^n
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que $1-0,72^n$ lorsque $n \geqslant 8$.
On en déduit qu'il faut au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à $0,9$.

Exercice 2 (6,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x)$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

- On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » pour la limite en $+\infty$.

Cependant, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$,

$$f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
La fonction f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x\times\frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$$

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}$$

La fonction f' est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.
Pour étudier la convexité d'une fonction f, on étudie le signe de sa dérivée seconde f''.
$2x+1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $2x+1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Convexité de f	‖	concave		convexe	

On en déduit que la fonction f est concave sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

f'' s'annule et change de signe en $x=\frac{1}{2}$ donc la courbe de f admet un unique point d'inflexion en $x=\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\ln(2)}{2}$

En conclusion, l'unique point d'inflexion de la courbe de f a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}+\frac{\ln(2)}{2}\right)$.

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $]\,0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]\,0\,;+\infty[$.

   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]\,0\,;+\infty[$.

   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
   Le signe de f'' de la question précédente nous permet d'en déduire les variations de f' sur $]\,0\,;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	$\ln(2)$	↗	

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$

6. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$.
   D'après la question précédente, le minimum de f' sur $]\,0\,;+\infty[$ est $\ln(2)>0$ donc f' est strictement positive sur $]\,0\,;+\infty[$. On en déduit donc que f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x)=x$.

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par

$$g(x)=x-\ln(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.

   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
   Pour étudier les variations de la fonction g, nous allons étudier le signe de sa fonction dérivée g'.
   Pour tout $x\in]\,0\,;+\infty[$,

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x	$\|\|$	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(1)=1-\ln(1)=1$

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=1$.
Résoudre, sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$.

$$\begin{aligned}
f(x)=x &\iff x^2-x\ln(x)=x\\
&\iff x^2-x\ln(x)-x=0\\
&\iff x(x-\ln(x)-1)=0\\
&\iff x-\ln(x)-1=0 \qquad \text{car } x\neq 0\\
&\iff x-\ln(x)=1\\
&\iff g(x)=1\\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]\,0\,;+\infty[$ et cette solution est $x=1$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=f\left(u_n\right)=u_n^2-u_n\ln\left(u_n\right)$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$$

- Initialisation :
$u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}\approx 0,597$.
On a bien $\dfrac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$.
On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
\Longrightarrow \quad & f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1) && \text{car la fonction } f \text{ est croissante sur }]\,0\,;+\infty[\\
\Longrightarrow \quad & \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1 && \text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597 \text{ et } f(1) = 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

3. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ donc f est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- La suite (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.
D'après la question **B.2.**, l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x = 1$.
En conclusion, la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

Exercice 3 (4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et $D(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+3s \\ y & = & -1-5s \\ z & = & 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-0\\0-2\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-0\\2-2\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{3}$ donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times 1 + 3\times 3 + 5\times(-2) = 1+9-10 = 0$
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 3 + 3\times(-1) + 5\times 0 = 0$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

(b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$x+3y+5z+d=0$$

De plus, $A \in (ABC)$ donc :

$$x_A+3y_A+5z_A+d=0 \iff -2+3\times 0+5\times 2+d=0 \iff d=-8$$

Finalement, une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0$$

(c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
$x_D+3y_D+5z_D-8 = 0+3\times 0+5\times 3-8 = 7 \neq 0$
On en déduit que $D \notin (ABC)$ et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **(a)** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.
D'une part, dans la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$, lorsque $t = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}$$

On reconnaît les coordonnées du point D donc D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.
D'autre part, un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal au plan (ABC).
On en déduit donc que la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan (ABC).
En conclusion, la droite $\mathscr{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.

(b) Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si, et seulement si, il existe des réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases}$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) \\ s = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.
Pour obtenir les coordonnées de leur point d'intersection M, on remplace t par $\frac{1}{7}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ (ou bien s par $-\frac{2}{7}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_2$).
On obtient alors :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = 3 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{26}{7} \end{cases}$$

En conclusion, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes en $M\left(\frac{1}{7} : \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$.

4. **(a)** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).
Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$, c'est-à-dire la droite $\mathscr{D}_1$.
$H \in (ABC) \cap \mathscr{D}_1$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3t \\ z_H = 3 + 5t \\ x_H + 3y_H + 5z_H - 8 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} t + 3 \times 3t + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 &\iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \\ &\iff 35t = -7 \\ &\iff t = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

En reprenant les trois premières lignes du système, on obtient alors :

$$\begin{cases} x_H = -\dfrac{1}{5} \\ y_H = 3 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{3}{5} \\ z_H = 3 + 5 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) = 2 \end{cases}$$

En conclusion, le point H a pour coordonnées $H\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}; 2\right)$.

(b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).
H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) donc la distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH.

$$\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - 0 \\ -\frac{3}{5} - 0 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{35}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

En conclusion, la distance du point D au plan (ABC) est égale à $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$.

Exercice 4 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant avec précision.
Une réponse non justifiée, même correcte, ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\; t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0,8t_n + 18 - 10 \\ &= -0,8t_n + 8 \\ &= -0,8(t_n - 10) \\ &= -0,8w_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -0,8$.
L'affirmation est donc **vraie**.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (v_n) converge.
Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} 3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4 &\iff \frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n} \\ &\iff 3 - \frac{4}{n} \leqslant v_n \leqslant 3 + \frac{4}{n} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) = 0$
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (v_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.
L'affirmation est donc **vraie**.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = e^n - n$.

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.
On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ » pour la limite en $+\infty$.
Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^n - n = n\left(\frac{e^n}{n} - 1\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{e^n}{n} - 1\right) = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.
En conclusion, la suite (w_n) diverge donc l'affirmation est **fausse**.

4. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.
D'après le script Python, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

D'après les données de l'énoncé, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est donc convergente vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 0,5\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.
On sait alors que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues sur cet intervalle.
- La fonction f est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- La suite (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$.

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} & \ell = 0,5\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \\ \iff & 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \\ \iff & \ell = \frac{2}{\ell} \\ \iff & \ell^2 = 2 \\ \iff & \ell = -\sqrt{2} \text{ ou } \ell = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Comme $\ell \geqslant \sqrt{2}$, on en déduit finalement que $\ell = \sqrt{2}$.
L'affirmation est donc **vraie**.