

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Mars 2025

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation d'une calculatrice **en mode examen** est autorisée.

Écrire le nom de votre professeur de mathématiques en haut à gauche sur votre première copie.

Vous veillerez à bien numéroter les pages de vos copies.

Il n'est pas nécessaire de rendre le sujet.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Il comporte 5 pages.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets. Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

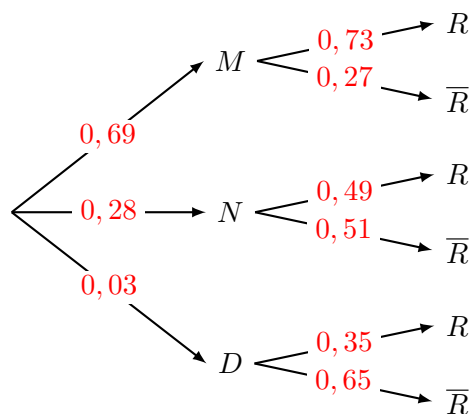
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\bar{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
 $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.
 La probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
 $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.
 Sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63% d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0,6514$.

$\{M; N; D\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R) \\ &= P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + P(D) \times P_D(R) \\ &= 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 \\ &= 0,6514 \end{aligned}$$

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

On cherche à calculer $P_R(N)$.

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{P(N) \times P_N(R)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} \approx 0,2106$$

La probabilité que le déchet soit non minéral et non dangereux sachant qu'il est recyclable est environ égale à 0,2106.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Chaque déchet prélevé est une épreuve de Bernoulli de succès S : « le déchet est recyclable » de probabilité $p = 0,6514$. On assimile ces prélèvements à des tirages avec remise donc ces prélèvements sont identiques et indépendants. X comptant le nombre de succès, la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6514$.

- (b) Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

$$E(X) = n \times p = 20 \times 0,6514 = 13,028.$$

Si l'on prélève un très grand nombre d'échantillons de 20 déchets, il y aura en moyenne 13 déchets recyclables par échantillon.

- (c) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables.

On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

$$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times (1 - 0,6514)^{20-14} \approx 0,1723$$

La probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables est environ égale à 0,1723.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

- (a) Déterminer l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

Dans cette question, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6514$.

$$p_n = P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times (1 - 0,6514)^{n-0} = 0,3486^n$$

La probabilité qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable est égale à $p_n = 0,3486^n$.

- (b) Déterminer, en résolvant une inéquation, la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,9999$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,3486^n$$

On résout donc dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\begin{aligned} 1 - 0,3486^n &\geq 0,9999 \\ \Leftrightarrow -0,3486^n &\geq -0,0001 \\ \Leftrightarrow 0,3486^n &\leq 0,0001 \\ \Leftrightarrow \ln(0,3486^n) &\leq \ln(0,0001) && \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[\\ \Leftrightarrow n \ln(0,3486) &\leq \ln(0,0001) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} && \text{car } \ln(0,3486) < 0 \end{aligned}$$

De plus, $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} \approx 8,7$ donc $n \geq 9$.

Il faudra donc prélever au moins 9 déchets pour que la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable soit supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel on considère :

- les points $A(6; -6; 6)$, $B(-6; 0; 6)$ et $C(-2; -2; 11)$.
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -8t - 6 \\ y = 4t \\ z = 5t + 6 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant avec précision. Une réponse non justifiée, même correcte, ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d .

D'après la représentation paramétrique, $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d .

On remarque alors que $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d .
L'affirmation est donc **VRAIE**.

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2k + 6 \\ y = k - 6 \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1 :

Montrons que B n'appartient pas à la droite Δ admettant cette représentation paramétrique.

En effet, $B \in \Delta$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x_B = 2k + 6 \\ y_B = k - 6 \\ z_B = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 2k + 6 \\ 0 = k - 6 \\ 6 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -6 \\ k = 6 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc $B \notin \Delta$ et donc (AB) n'admet pas une telle représentation paramétrique.

Méthode 2 :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 - 6 \\ 0 - (-6) \\ 6 - 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

$\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ donnée dans l'énoncé.

On constate alors que $\frac{-12}{2} \neq \frac{6}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. On peut alors en conclure que (AB) et Δ sont deux droites différentes et que (AB) n'admet pas une telle représentation paramétrique.

L'affirmation est donc **FAUSSE**.



Si jamais vous déterminiez une autre représentation paramétrique de la droite (AB) différente de celle de l'énoncé, on ne pourrait rien en conclure car une droite admet une infinité de représentations paramétriques différentes.

Affirmation 3 : Les points A , B et C sont alignés.

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ -2 - (-6) \\ 11 - 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour rappel, on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On constate que $\frac{6}{4} \neq \frac{0}{5}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

En conclusion, les points A , B et C ne sont pas alignés. L'affirmation est donc **FAUSSE**.

On considère une nouvelle droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2 \\ z = -\frac{1}{2}s + 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

$\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d' .

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Par conséquent, les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Cherchons maintenant si les droites d et d' sont sécantes ou non.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à d et d' si, et seulement si, il existe des réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x = -8t - 6 \\ y = 4t \\ z = 5t + 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2 \\ z = -\frac{1}{2}s + 1 \end{cases}$$

On résout donc le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} -8t - 6 = s - 1 \\ 4t = 2 \\ 5t + 6 = -\frac{1}{2}s + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -8 \times \frac{1}{2} - 6 = s - 1 \\ t = \frac{1}{2} \\ 5 \times \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{2}s + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = -9 \\ t = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}s = \frac{15}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = -9 \\ t = \frac{1}{2} \\ s = -15 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'admet pas de solution donc les droites d et d' ne sont pas sécantes.

En conclusion, les droites d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

L'affirmation est donc **VRAIE**.

Exercice 3 (5,5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.

Augmenter une valeur de 60% revient à la multiplier par $1 + \frac{60}{100} = 1,6$.

Par conséquent, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,6$ et de premier terme $u_0 = 0,1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 \times q^n = 0,1 \times 1,6^n$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$ car $1,6 > 1$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 = 0,1$ donc, par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.

$$u_n > 0,4 \iff 0,1 \times 1,6^n > 0,4$$

$$\iff 1,6^n > 4$$

$$\iff \ln(1,6^n) > \ln(4)$$

$$\iff n \ln(1,6) > \ln(4)$$

$$\iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$$

De plus, $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \approx 2,95$ donc le plus petit entier tel que $u_n > 0,4$ est $n = 3$.

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

D'après la question précédente, $u_3 > 0,4$ donc le nombre d'insectes dépasse 400 000 dès le troisième mois.

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel ne sera préservé.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

$$v_1 = 1,6 \times v_0 - 1,6 \times v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144$$

Le nombre d'insectes au bout d'un mois est donc égal à 144 000.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

(a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,6x - 1,6x^2 = x \\ &\iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \\ &\iff x(0,6 - 1,6x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,6 - 1,6x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,6}{1,6} \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: 0 et $\frac{3}{8}$.



Pas besoin de dégainer le discriminant pour résoudre une équation du second degré dont l'un des trois termes est nul, il suffit de factoriser.

(b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$f'(x) = 1,6 \times 1 - 1,6 \times 2x = 1,6 - 3,2x$$

De plus,

$$f'(x) \geq 0 \iff 1,6 - 3,2x \geq 0 \iff 1,6 \geq 3,2x \iff \frac{1,6}{3,2} \geq x \iff \frac{1}{2} \geq x$$

Par conséquent, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

• Initialisation :

$$v_0 = 0,1 \text{ et } v_1 = 0,144 \text{ donc } 0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

• Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$.

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.

On a :

$$0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\Rightarrow f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

car la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\Rightarrow 0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 0,4 \leq \frac{1}{2}$$

car $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,4$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

• Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in [0; \frac{1}{2}]$.

(c) On appelle ℓ la limite de la suite (v_n) . Démontrer que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

• La fonction f est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ car elle est dérivable sur cet intervalle.

• $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 0,4$ et la fonction f est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$.

Par conséquent, la fonction f est définie et à valeurs dans $[0; \frac{1}{2}]$.

• La suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in [0; \frac{1}{2}]$ d'après la question précédente.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ et donc $f(\ell) = \ell$.

(d) Déterminer la valeur de ℓ .

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

D'après la question 2.(a), les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et $\frac{3}{8}$.

De plus, d'après la question 3.(a), la suite (v_n) est croissante et $v_0 = 0,1$ donc $\ell \geq 0,1$.

Par conséquent, la limite de la suite (v_n) est $\ell = \frac{3}{8}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell \iff v_n \leq 0,375$.

Il y aura donc toujours moins de 375 000 insectes et l'équilibre du milieu sera donc préservé.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v = 0.1
    n = 0
    while v < a :
        v = 1.6 * v - 1.6 * v * v
        n = n + 1
    return (n)
```

(a) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 0,338 < 0,35$ et $v_6 \approx 0,358 > 0,35$.

La valeur renvoyée par seuil(0.35) est donc 6.

Cela signifie qu'à partir du 6ème mois, il y aura plus de 350 000 insectes.

(b) Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?

Justifier votre réponse.

La fonction seuil(a) renvoie la plus petite valeur de n telle que $v_n \geq a$.

Or on a vu précédemment que $v_n \leq 0,375$ pour tout entier naturel n donc il n'y aura aucune valeur pour laquelle $v_n \geq 0,4$. Le programme ne s'arrête jamais et ne renvoie donc aucune valeur.

Exercice 4 (5,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

On a alors, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{2x} = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$.

Finalement, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.



On aurait aussi pu utiliser le fait que $e^{2x} = (e^x)^2 = e^x \times e^x$ pour éviter la composition de limites.

- (b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Néanmoins, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3 = 2x \left(3 \times \frac{e^{2x}}{2x} - 1 \right) - 3$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$.

Par produit et somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{e^{2x}}{2x} - 1 \right) = +\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ donc, par produit et somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. (a) On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2 \times 1 + 0 = 6e^{2x} - 2$.

- (b) Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

Réolvons l'inéquation suivante :

$$g'(x) > 0 \iff 6e^{2x} - 2 > 0$$

$$\iff 6e^{2x} > 2$$

$$\iff e^{2x} > \frac{1}{3}$$

$$\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\iff 2x > -\ln(3)$$

$$\iff x > -\frac{1}{2} \ln(3)$$

De la même façon, on peut prouver que $g'(x) = 0$ lorsque $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

On en déduit alors le signe de la fonction g' et les variations de la fonction g :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right)$	$+\infty$

(c) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

Calculons l'image de $-\frac{1}{2}\ln(3)$ par la fonction g .

$$\begin{aligned}
 g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= 3 \times e^{2 \times \frac{-1}{2}\ln(3)} - 2 \times \frac{-1}{2}\ln(3) - 3 \\
 &= 3e^{-\ln(3)} + \ln(3) - 3 \\
 &= 3e^{\ln(\frac{1}{3})} + \ln(3) - 3 \\
 &= 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 \\
 &= \ln(3) - 2
 \end{aligned}$$

La fonction g admet bien un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. (a) Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

Calculons l'image de 0 par la fonction g .

$$g(0) = 3e^{2 \times 0} - 2 \times 0 - 3 = 3 - 0 - 3 = 0.$$

On en déduit que $x = 0$ est bien une solution de l'équation $g(x) = 0$.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α , dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

Tout d'abord, notons que $\ln(3) - 2 \approx -0,9 < 0$.

Ainsi, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ln(3); +\infty\right]$ où g est strictement croissante, on a $g(0) = 0$ et donc $x = 0$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.

▪ La fonction g est continue sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\ln(3)\right]$ car elle y est dérivable.

▪ La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\ln(3)\right]$:

▪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2$ et $0 \in [\ln(3) - 2; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\ln(3)\right]$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet donc bien exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et α .

Déterminons un encadrement de α à l'aide de la méthode par balayage.

$g(-2) \approx 1,05 > 0$ et $g(-1) \approx -0,6 < 0$ donc $-2 < \alpha < -1$.

$g(-1,5) \approx 0,15 > 0$ et $g(-1,4) \approx -0,02 < 0$ donc $-1,5 < \alpha < -1,4$.

rad GRAPHEUR	
Expressions	Graphique
Résultats exacts ☐ Régler l'intervalle	
x	f(x)
-5	7.0001362
-4	5.001006388
-3	3.007436257
-2	1.054946917
-1	-0.5939941503
0	0
1	17.1671683

rad GRAPHEUR	
Expressions	Graphique
Résultats exacts ☐ Régler l'intervalle	
x	f(x)
-1.8	0.6819711673
-1.7	0.5001198099
-1.6	0.3222866119
-1.5	0.1493612051
-1.4	-0.01756981212
-1.3	-0.1771792654
-1.2	-0.3278461401

4. Dédurre des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Avec ce qui précède, on peut préciser le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	α	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	0	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	$\downarrow$ 0	$\downarrow$ $\ln(3) - 2$	$\downarrow$ 0	$+\infty$

On a donc :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-	+

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x + 1$ $u'(x) = 2$
 $v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

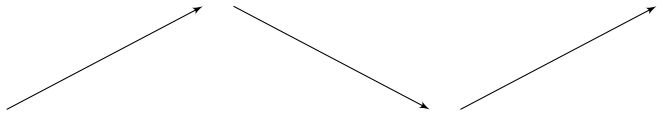
On a donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3e^{3x} - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \\
 &= 3e^{3x} - (2e^x + (2x+1)e^x) \\
 &= 3(e^x)^3 - (2e^x + (2x+1)e^x) \\
 &= e^x (3(e^x)^2 - 2 - (2x+1)) \\
 &= e^x (3e^{2x} - 2x - 3) \\
 &= e^x g(x)
 \end{aligned}$$

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

On en déduit donc le signe de f' et les variations de f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-	+
Variations de f				

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

Supposons par l'absurde que la fonction f soit convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction f' serait alors croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, on aurait par exemple $f'(-2) \leq f'(-1)$. Néanmoins, d'après la question précédente et le fait que $-1,5 < \alpha < -1,4$, on a $f'(-2) > 0$ et $f'(-1) < 0$ et donc $f'(-2) > f'(-1)$.

On aboutit à une absurdité, c'est donc que la fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.



Vouloir étudier le signe de la dérivée seconde de f pour en déduire la convexité de f est un très bon réflexe ! Malheureusement, c'est bien trop difficile à faire ici, il fallait se montrer plus malin.