

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Mars 2025

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation d'une calculatrice **en mode examen** est autorisée.

Écrire le nom de votre professeur de mathématiques en haut à gauche sur votre première copie.

Vous veillerez à bien numéroter les pages de vos copies.

Il n'est pas nécessaire de rendre le sujet.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Il comporte 5 pages.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets. Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

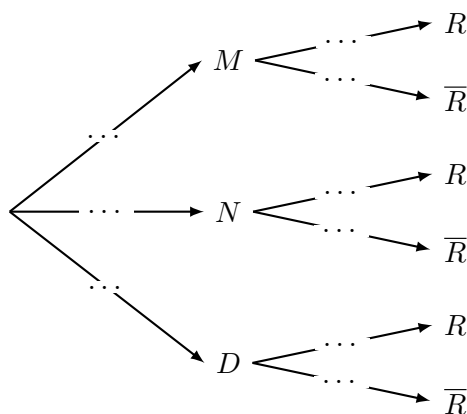
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\bar{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0,6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- (b) Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
- (c) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables.
On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

- (a) Déterminer l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
- (b) Déterminer, en résolvant une inéquation, la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel on considère :

- les points $A(6; -6; 6)$, $B(-6; 0; 6)$ et $C(-2; -2; 11)$.
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -8t - 6 \\ y = 4t \\ z = 5t + 6 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant avec précision. Une réponse non justifiée, même correcte, ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2, 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d .

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2k + 6 \\ y = k - 6 \\ z = 6 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Les points A , B et C sont alignés.

On considère une nouvelle droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = s - 1 \\ y = 2 \\ z = -\frac{1}{2}s + 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 (5,5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

- (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
 (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.
 (c) On appelle ℓ la limite de la suite (v_n) . Démontrer que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
 (d) Déterminer la valeur de ℓ .

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

- (a) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

- (b) Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
Justifier votre réponse.

```
def seuil(a) :
    v = 0.1
    n = 0
    while v < a :
        v = 1.6 * v - 1.6 * v * v
        n = n + 1
    return (n)
```

Exercice 4 (5,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. (a) On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
(b) Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
(c) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
3. (a) Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α , dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.