

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Avril 2026

## MATHÉMATIQUES

---

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation d'une calculatrice **en mode examen** est autorisée.

Écrire le nom de votre professeur de mathématiques en haut à gauche sur votre première copie.

Vous veillerez à bien numéroter les pages de vos copies.

Il n'est pas nécessaire de rendre le sujet.

---

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Il comporte 5 pages.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

---

## Exercice 1 (5 points)

On dispose de deux urnes opaques  $U_1$  et  $U_2$ .

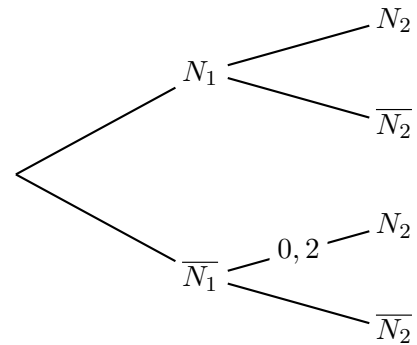
L'urne  $U_1$  contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne  $U_2$  contient 1 boule noire et 3 boules blanches. On considère l'expérience aléatoire suivante : On pioche au hasard une boule dans  $U_1$  que l'on place dans  $U_2$ , puis on pioche au hasard une boule dans  $U_2$ . On note :

- $N_1$  l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne  $U_1$  ».
- $N_2$  l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne  $U_2$  ».

### PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

- (a) Expliquer pourquoi la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne  $U_2$  sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne  $U_1$  est 0,2.
- (b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne  $U_1$  et une boule noire dans l'urne  $U_2$ .
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne  $U_2$  est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne  $U_2$ .  
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne  $U_1$ .  
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à  $10^{-2}$ .

### PARTIE B

Dans cette partie, l'expérience aléatoire précédente est répétée 20 fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes  $U_1$  et  $U_2$  sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne  $U_1$  et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne  $U_2$ , entre chaque expérience. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne  $U_2$ . On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne  $U_2$  est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne  $U_2$  est égale à 0,72.

- Déterminer la loi de probabilité suivie par  $X$ . Justifier votre réponse.
- Calculer  $E(X)$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- Calculer la probabilité de tirer exactement 6 boules noires dans l'urne  $U_2$ .  
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à  $10^{-2}$ .
- Donner la valeur de  $P(X > 3)$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.  
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à  $10^{-2}$ .

### PARTIE C

Dans cette partie, l'expérience aléatoire précédente est répétée  $n$  fois de façon identique et indépendante, où  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne  $U_2$ .

- Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $1 - 0,72^n \geq 0,9$ .
- Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

## Exercice 2 (6,5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x)$$

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

**Partie A :** Étude de la fonction  $f$ .

- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $f'(x)$ .
- Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

- Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.
- Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ .

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ .

Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

- Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**Partie B :** Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation  $f(x) = x$ .

On considère dans cette partie la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x - \ln(x)$ .

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on note  $g'$  sa dérivée.

- Pour tout réel strictement positif, calculer  $g'(x)$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $g$ .  
Les limites de la fonction  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- On admet que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 1$ .  
Résoudre, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .

**Partie C :** Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n)$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.
- On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 3** (4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère :

- les points  $A(-2; 0; 2)$ ,  $B(-1; 3; 0)$ ,  $C(1; -1; 2)$  et  $D(0; 0; 3)$ .
- la droite  $\mathcal{D}_1$  dont une représentation paramétrique est 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
- la droite  $\mathcal{D}_2$  dont une représentation paramétrique est 
$$\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. (a) Démontrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  est orthogonal au plan  $(ABC)$ .

(b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :

$$x + 3y + 5z - 8 = 0.$$

(c) En déduire que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires.

3. (a) Justifier que la droite  $\mathcal{D}_1$  est la hauteur du tétraèdre  $ABCD$  issue de  $D$ .

On admet que la droite  $\mathcal{D}_2$  est la hauteur du tétraèdre  $ABCD$  issue de  $C$ .

(b) Démontrer que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

(b) Calculer la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$ .

**Exercice 4 (4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant avec précision. Une réponse non justifiée, même correcte, ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite  $(t_n)$  vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, t_{n+1} = -0,8t_n + 18$$

**Affirmation 1 :** La suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = t_n - 10$  est géométrique.

2. On considère une suite  $(S_n)$  qui vérifie pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4$$

La suite  $(v_n)$  est définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par  $v_n = \frac{S_n}{n}$ .

**Affirmation 2 :** La suite  $(v_n)$  converge.

3. On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = e^n - n$ .

**Affirmation 3 :** La suite  $(w_n)$  converge.

4. On considère la suite  $(u_n)$  définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

```
def u(n) :  
    valeur = 2  
    for k in range(n) :  
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)  
    return valeur
```

On admet que  $(u_n)$  est décroissante et vérifie pour tout entier naturel  $n$  :

$$\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$$

**Affirmation 4 :** La suite  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{2}$ .