Correction Devoir Surveille N°9 (1h20)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (6 points)

Calculer les intégrales suivantes en détaillant vos calculs.

1. $I = \int_0^e \frac{x}{x^2+1}dx$ **2.** $J = \int_0^3 xe^{-x^2}dx$ **3.** $K = \int_0^1 \frac{1}{(2x+3)^2}dx$ **4.** $L = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^e \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^e \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^e \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(e^2+1) - \ln(0^2+1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(e^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^3 xe^{-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^3 -2xe^{-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-3^2} - e^{-0^2}\right) \\ &= \frac{1-e^{-9}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{1}{(2x+3)^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2}{(2x+3)^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+3}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 1+3} - \frac{1}{2\times 0+3}\right) \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

On cherche à calculer $L = \int_1^e (\ln(x))^2 \mathrm{d}x = \int_1^e (\ln(x))^2 \times 1 \,\mathrm{d}x$.
On définit les fonctions u et v sur $[1;e]$ par $u(x) = (\ln(x))^2$ et $v'(x) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in [1;e]$, on peut poser $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$ et $v(x) = x$.
De plus u et v sont dérivables sur $[1;e]$, et u' et v' sont continues sur $[1;e]$.
Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[(\ln(x))^2 \times x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{x}\ln(x) \times x \,\mathrm{d}x \\ &= \ln(e)^2 \times e - \ln(1)^2 \times 1 - 2\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e - 2\left[x\ln(x) - x\right]_1^e \\ &= e - 2(e\ln(e) - e - (1\ln(1) - 1)) \\ &= e - 2(e - e - 0 + 1) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

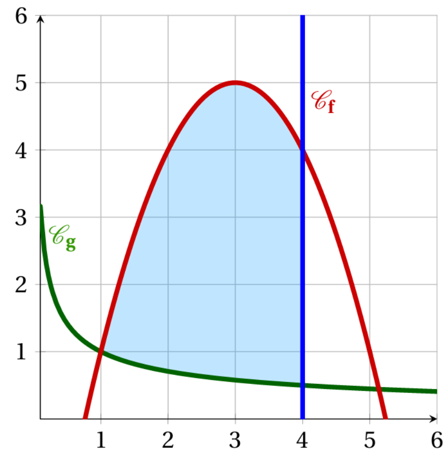
Exercice 2 (2 points)

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En vous aidant du graphique pour connaître la position relative des deux courbes et en vous aidant des expressions de f et g :

1. Hachurer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

2. Déterminer $\mathscr{A}$ par le calcul (en détaillant les étapes de calcul).



Graphiquement, on constate que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[1; 4]$ donc l'aire $\mathscr{A}$ est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^4 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4x - 2\sqrt{x}\right]_1^4 \\
&= -\frac{64}{3} + 48 - 16 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 4 - 2\right) \\
&= 10 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (8 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x+2)e^{-nx}$$

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = 3 - \dfrac{4}{e}$.

On cherche à calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^{-x}\mathrm{d}x$.
On définit les fonctions u et v sur $[0; 1]$ par $u(x) = x + 2$ et $v'(x) = e^{-x}$.
Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, on peut poser $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$.
De plus u et v sont dérivables sur $[0; 1]$, et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$.
Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 1\,\mathrm{d}x \\
&= -(1+2)e^{-1} + (0+2)e^{-0} + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{e} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{3}{e} + 2 + (-e^{-1} + e^{-0}) \\
&= 3 - \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)e^{-nx}(e^{-x} - 1)dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (x+2)e^{-(n+1)x}dx - \int_0^1 (x+2)e^{-nx}dx \\ &= \int_0^1 (x+2)e^{-(n+1)x} - (x+2)e^{-nx}dx \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 (x+2)(e^{-nx} \times e^{-x} - e^{-nx})dx \\ &= \int_0^1 (x+2)e^{-nx}(e^{-x} - 1)dx \end{aligned}$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).
Tout d'abord,

$$e^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant \ln(1) \iff x \leqslant 0$$

Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(x+2) > 0$, $e^{-nx} > 0$ et $(e^{-x} - 1) \leqslant 0$.
On en déduit alors que $(x+2)e^{-nx}(e^{-x} - 1) \leqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale, on a donc :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)e^{-nx}(e^{-x} - 1)dx \leqslant 0$$

En conclusion, la suite (I_n) est décroissante.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}(1 - e^{-n})$$

D'une part, pour tout $x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned} x \leqslant 1 &\iff x + 2 \leqslant 3 \\ &\iff (x+2)e^{-nx} \leqslant 3e^{-nx} \qquad \text{car } e^{-nx} > 0 \\ &\iff f_n(x) \leqslant 3e^{-nx} \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction f_n est positive sur $[0;1]$ donc, par croissance de l'intégrale, on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 3e^{-nx}dx \\ \iff & 0 \leqslant I_n \leqslant \left[-3\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 \\ \iff & 0 \leqslant I_n \leqslant -3\frac{e^{-n}}{n} + 3\frac{e^{-0}}{n} \\ \iff & 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}\left(1 - e^{-n}\right) \end{aligned}$$

5. En déduire que la suite (I_n) converge ainsi que sa limite.
$\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - e^{-n}) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}(1 - e^{-n}) = 0$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$,

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

Pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} &= \frac{a(x+1)(x-1) + bx(x-1) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{ax^2 - a + bx^2 - bx + cx^2 + cx}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (-b+c)x - a}{x(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient alors :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -b+c=0 \\ -a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=c \\ 2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

En conclusion, pour tout $x > 1$,

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

2. Déterminer alors une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

Les différents termes de f sont de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Une primitive de la fonction f sur $]1;+\infty[$ est donc de la forme :

$$F(x) = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

3. En déduire alors la valeur de $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)dx$.

On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln(2) + q\ln(3)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 f(x)dx \\
&= \left[-\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3 \\
&= -\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(2) - \left(-\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(1)\right) \\
&= -\ln(3) + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$