Devoir Surveille N°9 (1h20)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

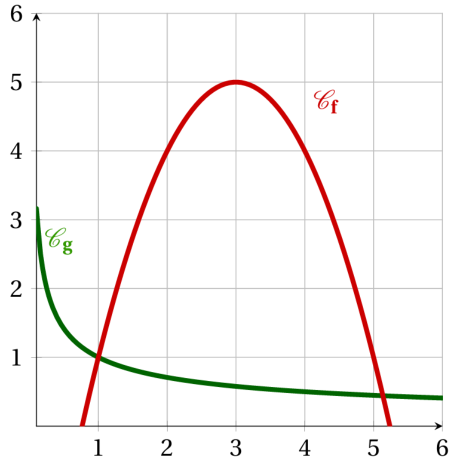
Exercice 1 (6 points)

Calculer les intégrales suivantes en détaillant vos calculs.

1. $I = \int_0^e \frac{x}{x^2+1}dx$ **2.** $J = \int_0^3 xe^{-x^2}dx$ **3.** $K = \int_0^1 \frac{1}{(2x+3)^2}dx$ **4.** $L = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$

Exercice 2 (2 points)

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



En vous aidant du graphique pour connaître la position relative des deux courbes et en vous aidant des expressions de f et g :

1. Hachurer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

2. Déterminer $\mathscr{A}$ par le calcul (en détaillant les étapes de calcul).

Exercice 3 (8 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x+2)e^{-nx}$$

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = 3 - \frac{4}{e}$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)e^{-nx}(e^{-x} - 1)dx$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}(1 - e^{-n})$$

5. En déduire que la suite (I_n) converge ainsi que sa limite.

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$,

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2. Déterminer alors une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

3. En déduire alors la valeur de $I = \int_2^3 f(x)dx$.
On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln(2) + q\ln(3)$.