Correction Devoir Surveille N°8 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Équation différentielle accueillante (1 point)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 10y$.
Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \mapsto Ce^{10x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 3$.
De plus,

$$f(2) = 3 \iff Ce^{10\times 2} = 3 \iff C = 3e^{-20}$$

En conclusion, la solution recherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = 3e^{-20}e^{10x} = 3e^{10x-20}}$.

Exercice 2 - Équation différentielle sympathique (2 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3$.

$$y' + 2y = 3 \iff y' = -2y + 3$$

On est dans la cas où $a = -2$ et $b = 3$.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{3}{2}, \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f'(0) = 2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2Ce^{-2x}$$

Ainsi, on a :

$$f'(0) = 2 \iff -2Ce^{-2\times 0} = 2 \iff -2C = 2 \iff C = -1$$

En conclusion, la solution recherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = -e^{-2x} + \frac{3}{2}}$.

Exercice 3 - Équation différentielle enquiquinante (3 points)

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = xe^x$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E).
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
Alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = a \times e^x + (ax + b)e^x$$
$$u'(x) = (ax + a + b)e^x$$

Ainsi, u est une solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) - 2u(x) = xe^x &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (ax + a + b)e^x + -2(ax + b)e^x = xe^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-ax + a - b)e^x = xe^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -ax + a - b = x \qquad \text{car } e^x \neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \qquad \text{par identification des coefficients} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{u(x) = (-x - 1)e^x}$.

2. En déduire toutes les solutions de (E).
Les solutions de (E) sont composées de la somme d'une solution particulière de (E) et des solutions générales de l'équation sans second membre $y' - 2y = 0$.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \mapsto (-x-1)e^{x} + Ce^{2x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.
De plus,

$$f(0) = 0 \iff (-0-1)e^{0} + Ce^{2\times 0} = 0 \iff -1 + C = 0 \iff C = 1$$

En conclusion, la solution recherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = (-x-1)e^{x} + e^{2x}}$.

Exercice 4 - Équation différentielle abominable (4 points)

On cherche s'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) & : & \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ (f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \\ (2) & : & f'(0) = 1 \\ (3) & : & f' \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1. **(a)** Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
En remplaçant dans la relation (1), on aurait alors :

$$\left(f'(x_0)\right)^2 - \left(f(x_0)\right)^2 = 1 \iff -\left(f(x_0)\right)^2 = 1 \iff \left(f(x_0)\right)^2 = -1$$

Le carré d'un nombre réel étant un nombre positif, on obtient une absurdité.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) \neq 0}$.

(b) Démontrer que $f(0) = 0$.
D'après la relation (1),

$$\left(f'(0)\right)^2 - \left(f(0)\right)^2 = 1$$

Or, d'après la relation (2), $f'(0) = 1$ donc :

$$1 - \left(f(0)\right)^2 = 1 \iff \boxed{f(0) = 0}$$

2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que, pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.
En dérivant la relation (1), on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \iff 2f'(x)\left(f''(x) - f(x)\right) = 0$$

Or, on a démontré que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f''(x) - f(x) = 0 \iff f''(x) = f(x)}$$

3. On pose $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f \end{cases}$.

(a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
$u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = \boxed{1}$.
$v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$.

(b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
En utilisant la question **2.**, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$$
$$v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -(f'(x) - f(x)) = -v'(x)$$

On a donc bien $\boxed{u' = u}$ et $\boxed{v' = -v}$.

(c) En déduire les expressions de u et v en résolvant les équations différentielles précédentes.
Les solutions de l'équation différentielle $u' = u$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto Ce^x, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

De plus, on a :

$$u(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C = 1$$

En conclusion, la solution recherchée est la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{u(x) = e^x}$.
Les solutions de l'équation différentielle $v' = -v$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto Ce^{-x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

De plus, on a :

$$v(0) = 1 \iff Ce^{-0} = 1 \iff C = 1$$

En conclusion, la solution recherchée est la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{v(x) = e^{-x}}$.

(d) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

D'après la question **3.**, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u(x) = f'(x) + f(x) \\ v(x) = f'(x) - f(x) \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(x) - v(x) = 2f(x) &\iff f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} \\ &\iff \boxed{f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 5 - ... et un peu de géométrie ! (10 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1;1;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **(a)** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

Le vecteur $\boxed{\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}$ est normal au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

(b) Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

Comme le repère est orthonormé, on a :

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times 1+1\times(-1)+(-1)\times 1=0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.

En conclusion, $\boxed{\text{les plans } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont perpendiculaires}}$.

2. **(a)** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$ donc il a une équation cartésienne de la forme

$$x-y+z+d=0$$

De plus, $B(1;1;2)\in\mathcal{P}_2$ donc :

$$x_B-y_B+z_B+d=0 \iff 1-1+2+d=0 \iff d=-2$$

En conclusion, le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $\boxed{x-y+z-2=0}$.

(b) On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbb{R}$$

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

<u>Méthode 1 :</u>

L'idée est de passer une des variables x, y ou z en paramètre.

Faisons ici le choix de poser $z=t$ comme l'énoncé le suggère.

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\Delta &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+z-2=0 \\ z=t \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y-t+2=0 \\ x-y+t-2=0 \\ z=t \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} 3x=0 & \quad L_1+L_2 \\ x-y+t-2=0 & \\ z=t & \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -y+t-2=0 \\ z=t \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=2-t \\ z=t \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que la droite Δ, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}}$$

Méthode 2 :

On peut également montrer que la droite Δ est incluse dans $\mathcal{P}_1$ et également dans $\mathcal{P}_2$.
En effet, on a démontré que ces deux plans étaient sécants, ils sont donc sécants suivant une droite qui appartient simultanément aux deux plans et cette droite est unique.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2 \times 0 + (-2+t) - t + 2 = 0$ donc Δ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 - (-2+t) + t - 2 = 0$ donc Δ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_2$.
En conclusion, la droite Δ a bien pour représentation paramétrique

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}}$$

On considère le point $A(1;1;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0; -2+t; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

(a) Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

$$\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix} x_{M_t} - x_A \\ y_{M_t} - y_A \\ z_{M_t} - z_A \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0-1 \\ -2+t-1 \\ t-1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ t-3 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} AM_t &= \sqrt{(-1)^2 + (t-3)^2 + (t-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$$

(b) En déduire que $AH = \sqrt{3}$.
Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, donc la longueur AH réalise le minimum des longueurs AM_t où M_t est un point de Δ.
Il faut donc chercher le minimum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{4t - 8}{2\sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{2t^2 - 8t + 11} > 0$ donc $f'(t)$ est du même signe que $4t - 8$.
De plus, $4t - 8 \geqslant 0 \iff 4t \geqslant 8 \iff t \geqslant 2$.
On peut donc en déduire le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Ainsi, le minimum de de la fonction f est atteint en $t=2$ et ce minimum vaut

$$f(2)=\sqrt{2\times 2^2-8\times 2+11}=\sqrt{3}$$

On en déduit alors que $\boxed{AH=\sqrt{3}}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
La droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ donc le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$.
De plus la droite $\mathcal{D}_1$ passe par le point $A(1;1;1)$ donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & t+1 \\ z & = & -t+1 \end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}}$$

(b) En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.
H_1 est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$ donc $H_1\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{P}_1$.
Par conséquent, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{H_1}=2t+1 \\ y_{H_1}=t+1 \\ z_{H_1}=-t+1 \\ 2x_{H_1}+y_{H_1}-z_{H_1}+2=0 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & 2(2t+1)+t+1-(-t+1)+2=0 \\ \iff & 4t+2+t+1+t-1+2=0 \\ \iff & 6t+4=0 \\ \iff & t=-\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{H_1}=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+1=-\frac{1}{3} \\ y_{H_1}=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3} \\ z_{H_1}=-\left(-\frac{2}{3}\right)+1=\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

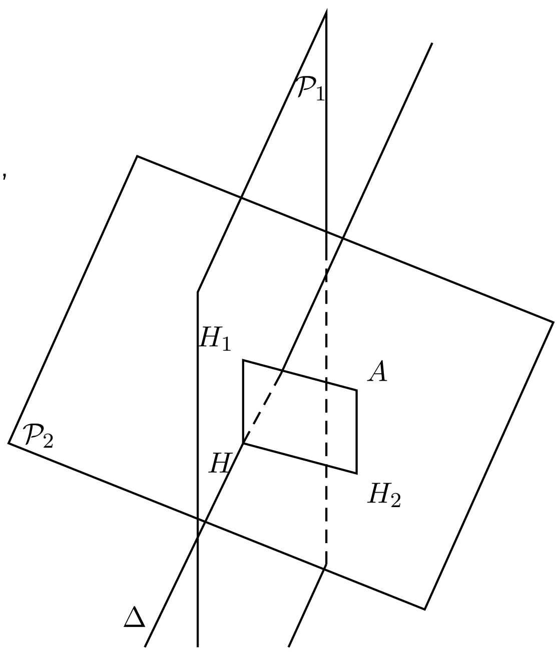
En conclusion, le point H_1 a pour coordonnées $\boxed{H_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)}$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que les coordonnées des points H et H_2 sont :

$$H_2\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right) \quad \text{et} \quad H(0;0;2)$$

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2 et H.
Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



$$\overrightarrow{H_1A}\begin{pmatrix} 1-\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1-\frac{1}{3} \\ 1-\frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{H_1A}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HH_2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3}-0 \\ \frac{2}{3}-0 \\ \frac{4}{3}-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{HH_2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{H_1A}=\overrightarrow{HH_2}$ donc AH_1HH_2 est un parallélogramme.
De plus, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dont perpendiculaires donc le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit.
En conclusion, $\boxed{AH_1HH_2 \text{ est un rectangle}}$.