Devoir Surveille N°8 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Équation différentielle accueillante (1 point)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 10y$.

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 3$.

Exercice 2 - Équation différentielle sympathique (2 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3$.

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f'(0) = 2$.

Exercice 3 - Équation différentielle enquiquinante (3 points)

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = xe^x$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E).

2. En déduire toutes les solutions de (E).

3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 4 - Équation différentielle abominable (4 points)

On cherche s'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} (1) & : & \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ (f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \\ (2) & : & f'(0) = 1 \\ (3) & : & f' \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

1. **(a)** Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.

(b) Démontrer que $f(0) = 0$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que, pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose $\left\{\begin{array}{l} u = f' + f \\ v = f' - f \end{array}\right.$.

(a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

(b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

(c) En déduire les expressions de u et v en résolvant les équations différentielles précédentes.

(d) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Exercice 5 - ... et un peu de géométrie ! (10 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1;1;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **(a)** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

   (b) Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **(a)** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

   (b) On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

   Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1;1;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0; -2+t; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

   (a) Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

   (b) En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

   (b) En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

   On admet que les coordonnées des points H et H_2 sont :

$$H_2\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad H(0;0;2)$$

   Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2 et H.
   Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.