

# DEVOIR SURVEILLE N°7 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

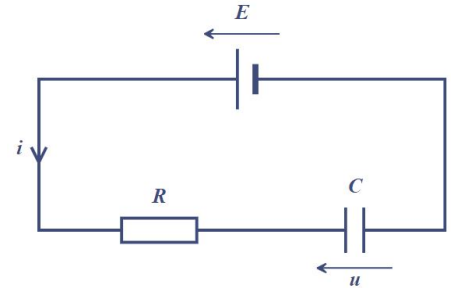
## Exercice 1 (6 points)

Un condensateur est un dipôle constitué de deux lames métalliques séparées par un isolant. Il permet d'emmagasiner de l'énergie électrique pendant un certain temps, puis de décharger cette énergie.

Ce principe est, par exemple, utilisé lorsque l'on charge, puis que l'on décharge le flash d'un appareil photo.

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela d'un circuit électrique composé de :

- une source de tension continue  $E$  de 10 V.
- une résistance  $R$  de  $10^5 \Omega$ .
- un condensateur de capacité  $C$  de  $10^{-6}$  F.



On note  $u$  la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension  $u$  est une fonction du temps  $t$  exprimé en seconde. La fonction  $u$  est définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  et elle vérifie l'équation différentielle :

$$RCu' + u = E$$

1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à :  $u' + 10u = 100$ .

Avec  $R = 10^5$ ,  $C = 10^{-6}$  et  $E = 10$ , la fonction  $u$  vérifie l'équation différentielle :

$$10^5 \times 10^{-6} u' + u = 10 \iff 10^{-1} u' + u = 10 \iff \boxed{u' + 10u = 100}$$

2. (a) Déterminer les solutions de cette équation différentielle.

$$u' + 10u = 100 \iff u' = -10u + 100$$

On est dans le cas où  $a = -10$  et  $b = 100$ .

Les solutions de cette équation différentielles sont les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$t \mapsto Ce^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$t \mapsto Ce^{-10t} - \frac{100}{-10} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{t \mapsto Ce^{-10t} + 10} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

(b) On considère qu'à l'instant  $t = 0$ , le condensateur est déchargé.

Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction  $u$  telle que  $u(0) = 0$ .

De plus,  $u(0) = 0 \iff Ce^{-10 \times 0} + 10 = 0 \iff C = -10$ .

Finalement, la fonction  $u$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\boxed{u(t) = 10 - 10e^{-10t}}$ .

(c) Déterminer, en justifiant la réponse, la limite en  $+\infty$  de la fonction  $u$  ainsi obtenue.

En donner une interprétation.

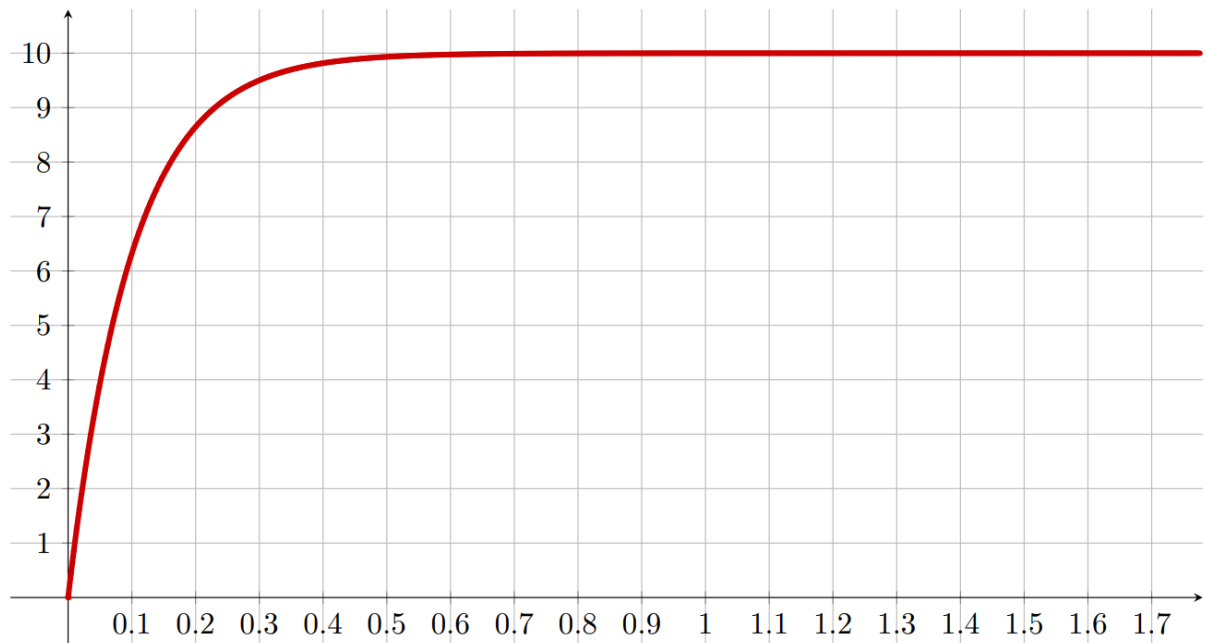
$\lim_{t \rightarrow +\infty} -10t = -\infty$  et  $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$  donc, par composition de limites,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-10t} = 0$ .

Par conséquent, par produit et somme de limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 10}$$

Au fil du temps, la tension aux bornes du condensateur va se rapprocher de 10 volts.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction  $u$  qui vient d'être obtenue à la question 2.(b) avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.



On appelle  $T$  le temps de charge en seconde pour que  $u(T)$  soit égal à 95% de  $E$ .

(a) Déterminer graphiquement le temps de charge  $T$ .

Le temps de charge est d'environ 0,3 seconde.

(b) Retrouver le résultat précédent en résolvant une équation.

Le temps de charge  $T$  est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
 u(t) = 10 \times 0,95 &\iff 10 - 10e^{-10t} = 9,5 \\
 &\iff -10e^{-10t} = -0,5 \\
 &\iff e^{-10t} = 0,05 \\
 &\iff -10t = \ln(0,05) \\
 &\iff t = \frac{\ln(20)}{10} \approx 0,3
 \end{aligned}$$

Le temps de charge est égal à  $T = \frac{\ln(20)}{10}$ , soit environ 0,3 seconde.

4. Sans modifier les valeurs respectives de  $E$  et de  $C$ , déterminer la valeur de  $R$  afin que le temps de charge  $T$  soit multiplié par 2.

▪ Soit  $v$  la tension, exprimée en volts, aux bornes du condensateur.

La fonction  $v$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$R \times 10^6 v' + v = 10 \iff v' + \frac{10^6}{R} v = \frac{10^7}{R}$$

▪ Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par

$$v(t) = Ce^{-\frac{10^6}{R}t} + 10 \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

▪ La condition initiale  $v(0) = 0$  équivaut à  $Ce^{-\frac{10^6}{R} \times 0} + 10 = 0$  d'où  $C = -10$ .

Par conséquent, la fonction  $v$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $v(t) = 10 - 10e^{-\frac{10^6}{R}t}$

▪ Le temps de charge est multiplié par 2 lorsque  $R$  est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
 10 - 10e^{-\frac{10^6}{R} \times 2 \times T} = 10 - 10e^{-10 \times T} &\iff -\frac{2 \times 10^6 \times T}{R} = -10 \times T \\
 &\iff \frac{2 \times 10^5}{R} = 1 \\
 &\iff R = 2 \times 10^5
 \end{aligned}$$

Le temps de charge est multiplié par 2 avec une résistance  $R$  de  $2 \times 10^5 \Omega$ .

## Exercice 2 (4 points)

On considère sur  $[0; +\infty[$  l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$$

Soit  $y$  une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$ . On pose  $z = \frac{1}{y}$ .

1. Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  si, et seulement si,  $z$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$$

Tout d'abord, rappelons que si  $z = \frac{1}{y}$ , alors  $z' = -\frac{y'}{y^2}$ , on a, en enchaînant les équivalences :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E_1) &\iff z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \\ &\iff -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{20} \\ &\iff y' = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{20} \\ &\iff y' = \frac{1}{20}y(10 - y) \\ &\iff y \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation  $(E_1)$ .

On reconnaît une équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$  avec  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{20}$ .  
Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} z(x) &= Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R} \\ z(x) &= Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. En déduire les solutions de  $(E)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff z \text{ est solution de } (E_1) \\ &\iff z(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \\ &\iff \frac{1}{y(x)} = Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \\ &\iff y(x) = \frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

4. Déterminer la solution  $y$  de  $(E)$  qui vérifie  $y(0) = 1$ .

De plus,

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\iff \frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2} \times 0} + \frac{1}{10}} = 1 \\ &\iff \frac{1}{C + \frac{1}{10}} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{10} = 1 \\ &\iff C = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

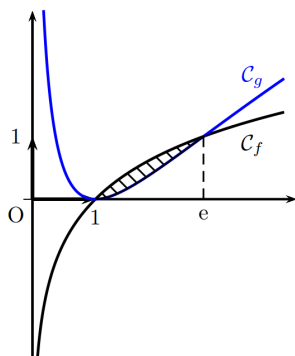
En conclusion, la solution recherchée est définie par :

$$y(x) = \frac{1}{\frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$$

### Exercice 3 (5 points)

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln(x))^2$$



1. On cherche à déterminer l'aire  $\mathcal{A}$  (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note  $I = \int_1^e \ln(x) dx$  et  $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$ .

(a) Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire la valeur de  $I$ .

$F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit et somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .  
Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$$

On en déduit que  $F$  est bien une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

On en déduit que :

$$I = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e = e \ln(e) - e - (1 \ln(1) - 1) = 1$$

(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que  $J = e - 2I$ .

On définit les fonctions  $u$  et  $v$  sur  $[1; e]$  par  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = (\ln(x))^2$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [1; e]$ , on peut poser  $u(x) = \frac{2 \ln(x)}{x}$  et  $v'(x) = x$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[1; e]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[1; e]$ .

Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (\ln(x))^2 dx \\ &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx \\ &= \left[ x (\ln(x))^2 \right]_1^e + \int_1^e \frac{2 \ln(x)}{x} \times x dx \\ &= e - \int_1^e \ln(x) dx \\ &= e - 2I \end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de  $J$  puis la valeur de  $\mathcal{A}$ .

Comme  $I = 1$ , on obtient finalement que  $J = e - 2$ .

Pour tout  $x \in [1; e]$ ,  $0 \leq \ln(x) \leq 1$  donc  $0 \leq (\ln(x))^2 \leq \ln(x)$  donc  $g(x) \leq f(x)$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_1^e f(x) dx - \int_1^e g(x) dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= I - J \\ &= 3 - e \end{aligned}$$

2. Pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1; e]$ , on note  $M$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $x$ . Pour quelle valeur de  $x$  la distance  $MN$  est-elle maximale? Calculer la valeur maximale de  $MN$ .

On a  $MN = \ln(x) - (\ln(x))^2$  et on cherche à déterminer quand cette distance est maximale sur  $[1; e]$ .

Pour cela, on va poser la fonction  $h$  définie sur  $[1; e]$  par  $h(x) = \ln(x) - (\ln(x))^2$  et on va étudier ses variations.  $h$  est dérivable sur  $[1; e]$  et, pour tout  $x \in [1; e]$ ,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}$$

Puisque  $x > 0$ , on en déduit que  $h'(x)$  est du même signe que  $1 - 2\ln(x)$ .

$$\begin{array}{ll} h'(x) = 0 & h'(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 & \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} & \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

On en déduit alors le tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $[1; e]$ .

$x$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	$e$
$h'(x)$		0	
$h(x)$		$h(e^{\frac{1}{2}})$	

Par conséquent, la fonction  $h$  admet un maximum en  $x = e^{\frac{1}{2}}$ .

De plus,  $h(e^{\frac{1}{2}}) = \dots = \frac{1}{4}$ .

En conclusion,  $MN$  est maximale en  $x = e^{\frac{1}{2}}$  et vaut alors  $\frac{1}{4}$ .

### Exercice 4 (2,5 points)

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 2]$  par  $g(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$ .

1. Déterminer une primitive  $G$  de  $g$  sur  $[0; 2]$ .

Pour tout  $x \in [0; 2]$ ,  $G(x) = \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 5)$  est une primitive possible.

2. En déduire la valeur exacte de  $J = \int_0^2 g(x) dx$ .

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 g(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 5) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} \ln(e^{3 \times 2} + 5) - \frac{1}{3} \ln(e^{3 \times 0} + 5) \\ &= \frac{1}{3} \ln(e^6 + 5) - \frac{1}{3} \ln(6) \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{e^6 + 5}{6}\right) \end{aligned}$$

3. Déterminer la valeur moyenne  $m$  de  $g$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

Vous en donnerez la valeur exacte puis une valeur approchée au millième.

$$m = \frac{1}{2-0} \int_0^2 g(x) dx = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{e^6 + 5}{6}\right) \approx 0,703$$

## Exercice 5 (2,5 points)

1. Montrer que, pour tout réel  $t \in [0; 1]$ ,  $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$ .

Soit  $t \in [0; 1]$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 &\iff 1 \leq t+1 \leq 2 \\ &\iff \frac{1}{1} \geq \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{2} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0; +\infty[ \\ &\iff t^2 \geq \frac{t^2}{t+1} \geq \frac{t^2}{2} && \text{car } t^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$ .

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{2} dt &\leq \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_0^1 t^2 dt \\ \iff \left[ \frac{1}{2} \times \frac{t^3}{3} \right]_0^1 &\leq \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ \iff \frac{1}{6} &\leq \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. **Bonus** : Calculer la valeur exacte de cette intégrale.

Pour calculer cette intégrale, il faut utiliser la fameuse technique du « +1 - 1 ». En effet,

$$\frac{t^2}{t+1} = \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} = \frac{t^2 - 1}{t+1} + \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t-1)}{t+1} + \frac{1}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

Trouver une primitive de cette nouvelle expression est alors bien plus simple et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt &= \int_0^1 \left( t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1) \right) - \left( \frac{0^2}{2} - 0 + \ln(0+1) \right) \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$