

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°7 (1H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (15 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. (a) Étudier la limite de f en 0.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc, par somme de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln(x)) = -\infty$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ donc, par quotient de limites, on a :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$$

(b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$

De plus, $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par conséquent, par produit et somme de limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe \mathcal{C} .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ donc la courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} u(x) &= 1 + \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= x^2 & v'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x(-1 - 2 \ln(x))}{x^4} \\ \boxed{f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}} \end{aligned}$$

(b) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 -1 - 2 \ln(x) > 0 &\iff 1 + 2 \ln(x) < 0 \\
 &\iff 2 \ln(x) < -1 \\
 &\iff \ln(x) < -\frac{1}{2} \\
 &\iff e^{\ln(x)} < e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\
 &\iff x < e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln(x)$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	0

$$\text{Enfin, } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2} \times 2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$$

3. (a) Démontrer que la courbe \mathcal{C} a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

$$f(x) = 0 \iff \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = \frac{1}{e}$$

Par conséquent, la courbe \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en un seul point $A\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Avec ce qui précède, on peut préciser le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0	$\frac{e}{2}$	0

On a donc :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	0	+

Exercice 2 (5 points)

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par :

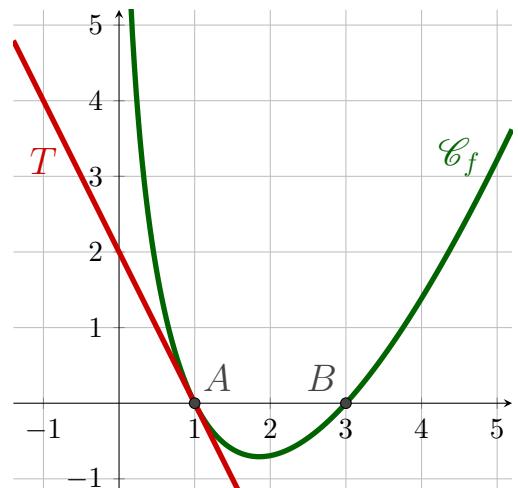
$$f(x) = (ax + b) \ln(x)$$

où a et b sont deux réels donnés.

La courbe passe par les points $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

Déterminer a et b .



- $A(1; 0) \in \mathcal{C}_f \iff f(1) = 0$
- $B(3; 0) \in \mathcal{C}_f \iff f(3) = 0 \iff (3a + b) \ln(3) = 0 \iff \boxed{3a + b = 0}$
- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \times \ln(x) + (ax + b) \times \frac{1}{x} \\ f'(x) &= a \ln(x) + a + \frac{b}{x} \end{aligned}$$

La tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x = 1$ a pour coefficient directeur -2 donc :

$$f'(1) = -2 \iff a \ln(1) + a + \frac{b}{1} = -2 \iff \boxed{a + b = -2}$$

- On résout donc un système pour déterminer les valeurs de a et b :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3a + b & = & 0 \\ a + b & = & -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2a & = & 2 \\ a + b & = & -2 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -3 \end{array} \right.}$$

- Finalement,

$$\boxed{f(x) = (x - 3) \ln(x)}$$