Devoir Surveillé N°7 (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (15 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. **(a)** Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **(a)** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

   $$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. **(a)** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 2 (5 points)

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(ax+b)\ln(x)$$

où a et b sont deux réels donnés.

La courbe passe par les points $A(1;0)$ et $B(3;0)$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

Déterminer a et b.