Devoir Surveillé N°7 (2h)

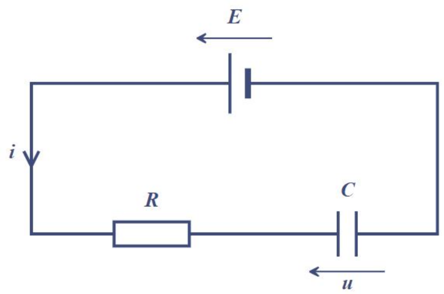
Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (6 points)

Un condensateur est un dipôle constitué de deux lames métalliques séparées par un isolant. Il permet d'emmagasiner de l'énergie électrique pendant un certain temps, puis de décharger cette énergie.
Ce principe est, par exemple, utilisé lorsque l'on charge, puis que l'on décharge le flash d'un appareil photo.

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela d'un circuit électrique composé de :

- une source de tension continue E de 10 V.
- une résistance R de 10^5 Ω.
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en seconde. La fonction u est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et elle vérifie l'équation différentielle :

$$RCu' + u = E$$

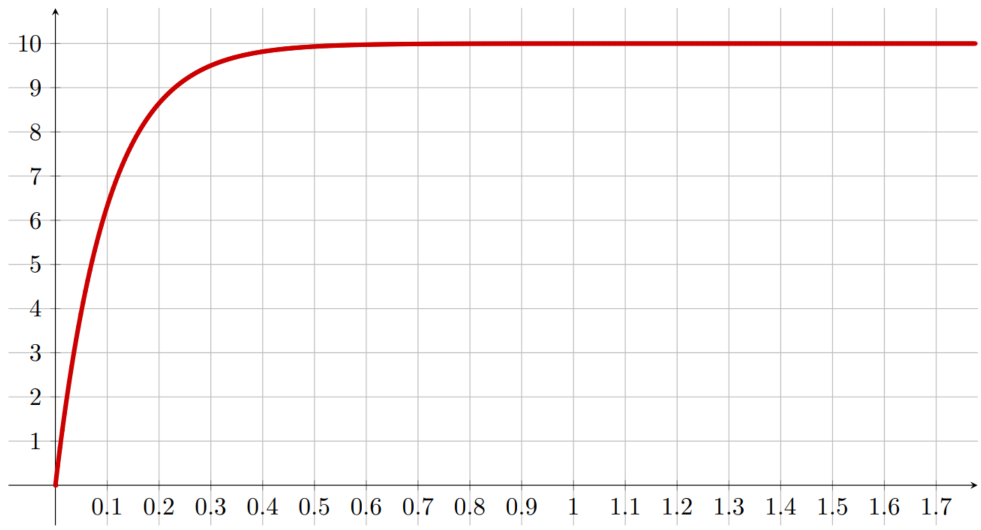
1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à $u' + 10u = 100$.

2. **(a)** Déterminer les solutions de cette équation différentielle.

(b) On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé.
Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u telle que $u(0) = 0$.

(c) Déterminer, en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u ainsi obtenue.
En donner une interprétation.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question **2.(b)** avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.



On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(T)$ soit égal à 95% de E.

(a) Déterminer graphiquement le temps de charge T.

(b) Retrouver le résultat précédent en résolvant une équation.

4. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de R afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.

Exercice 2 (4 points)

On considère sur $[0;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y)$$

Soit y une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

1. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$$

2. Résoudre l'équation (E_1).

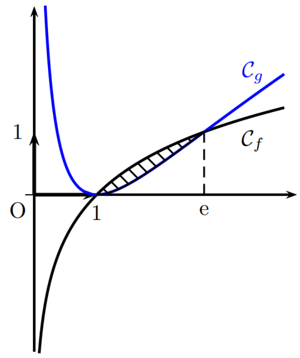
3. En déduire les solutions de (E).

4. Déterminer la solution y de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 3 (5 points)

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln(x))^2$$



1. On chercher à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$.

(a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire la valeur de I.

(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que $J = e - 2I$.

(c) En déduire la valeur de J puis la valeur de $\mathscr{A}$.

2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x. Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 4 (2,5 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+5}$.

1. Déterminer une primitive G de g sur $[0;2]$.

2. En déduire la valeur exacte de $J = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer la valeur moyenne m de g sur l'intervalle $[0;2]$.
Vous en donnerez la valeur exacte puis une valeur approchée au millième.

Exercice 5 (2,5 points)

1. Montrer que, pour tout réel $t \in [0;1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leqslant \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Bonus : Calculer la valeur exacte de cette intégrale.