

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°6 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (9 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

■ Par somme de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (5x^2 + 2x) = 0$.

Par croissances comparées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0$.

Ainsi, par produit et somme de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

■ On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ » pour la limite en $+\infty$.

Néanmoins, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = x^2 \left(5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par produit et somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right) = -\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = 5x^2 + 2x + u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = -2x^2 & u'(x) = -4x \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x + 2 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 10x + 2 - 4x \times \ln(x) - 2x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x \\ &= 8x + 2 - 4x \ln(x) \end{aligned}$$

3. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 8x + 2 + u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = -4x & u'(x) = -4 \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 8 - 4 \times \ln(x) - 4x \times \frac{1}{x} \\ &= 8 - 4 \ln(x) - 4 \\ &= 4(1 - \ln(x)) \end{aligned}$$

- (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe.

Pour étudier la convexité de la fonction f , nous allons étudier le signe de la fonction f'' .

$$\begin{aligned}
 4(1 - \ln(x)) &= 0 & (1 - \ln(x)) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) &= 0 & \Leftrightarrow 1 - \ln(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \ln(x) &= 1 & \Leftrightarrow \ln(x) &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow x &= e & \Leftrightarrow x &\leq e \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[
 \end{aligned}$$

On en déduit que f est convexe sur $]0; e]$ et donc que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes sur $]0; e]$.

- (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)

L'étude de signe de la question 3.(b) nous permet d'en déduire le signe de la fonction f'' puis les variations de la fonction f' .

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
$f'(x)$	2	$4e + 2$	$-\infty$

$$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e) = 8e + 2 - 4e = 4e + 2$$

4. (a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α dont on déterminera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Sur l'intervalle $]0; e]$, la fonction f' est minorée par 2 donc l'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

- La fonction f' est continue sur $[e; +\infty[$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction f' est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.
- $f'(e) = 4e + 2 \approx 13$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty; 4e + 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[e; +\infty[$ et donc sur $]0; +\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $7,87 < \alpha < 7,88$.

- (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

A l'aide des questions précédentes, on peut en déduire le signe de la fonction f' puis les variations de f .

x	0	e	α	$+\infty$
$f'(x)$	2	$4e + 2$	0	$-\infty$
$f''(x)$		+	-	

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

5. (a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

On a $f'(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha)$ donc :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0 \\ &\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha + 1)}{4\alpha} \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha \\ &= \alpha^2 + \alpha \end{aligned}$$

(b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .

D'après la question 4.(a), on a :

$$\begin{aligned} 7,87 < \alpha < 7,88 &\iff 61,9369 < \alpha^2 < 62,0944 \\ &\iff 69,806 < \alpha^2 + \alpha < 69,9744 \\ &\iff 69,806 < f(\alpha) < 69,9744 \end{aligned}$$

Exercice 2 (3 points)

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ de centre O .

On note I le milieu de $[SO]$ et K le point tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

On se place dans le repère $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{OK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SK} \\ &= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} \\ &= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

2. Déterminer les coordonnées des points B , I et K .

$\overrightarrow{OB} = 1 \times \overrightarrow{OB} + 0 \times \overrightarrow{OC} + 0 \times \overrightarrow{OS}$ donc le point B a pour coordonnées $B(1; 0; 0)$.

$\overrightarrow{OI} = 0 \times \overrightarrow{OB} + 0 \times \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{OS}$ donc le point I a pour coordonnées $I(0; 0; \frac{1}{2})$.

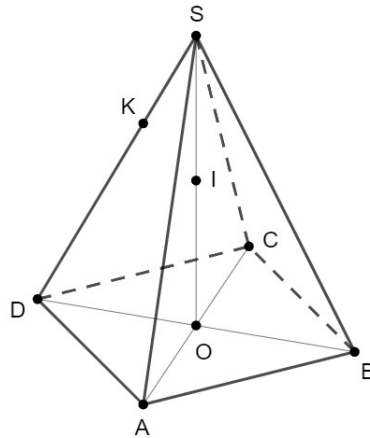
$\overrightarrow{OK} = -\frac{1}{3} \times \overrightarrow{OB} + 0 \times \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \times \overrightarrow{OS}$ donc le point K a pour coordonnées $K(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3})$.

3. Démontrer que les points B , I et K sont alignés.

$$\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0 \\ \frac{1}{2} & -0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -0 \\ \frac{2}{3} & -0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

En conclusion, les points B , I et K sont alignés.



Exercice 3 (2 points)

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

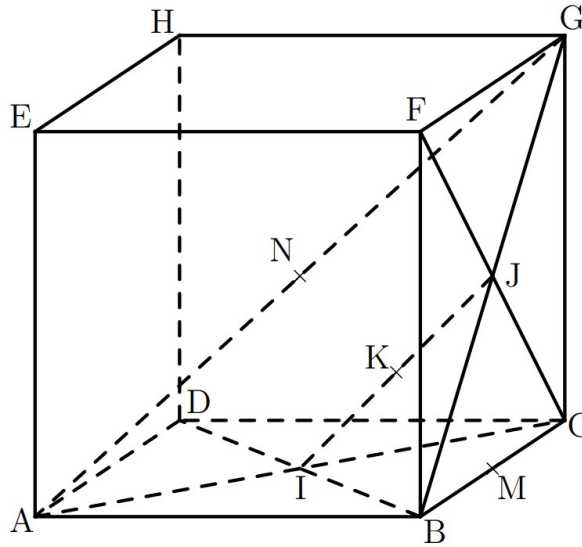
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
On cherche à déterminer s'il existe ou non un couple de réels $(x; y)$ tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} &\iff \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = -2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -7y = -14 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -y = -7 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 2 \\ y = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'admet pas de solution, il n'existe donc pas de valeurs de x et de y telles que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 4 (6 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I le centre de la face $ABCD$, J le centre de la face $BCGF$, K le milieu de $[IJ]$, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AG]$.



1. Dans cette question, on souhaite montrer que K est le milieu de $[MN]$.

(a) Démontrer que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

On admet que, de même, $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI}$$

d'après la relation de Chasles

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

car M est le milieu de $[BC]$ et I est le milieu de $[CA]$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

d'après la relation de Chasles

(b) Montrer que $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{MK}$.

On admet que, de même, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MN}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} &= \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KJ} \\ &= 2\overrightarrow{MK}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

car K est le milieu de $[IJ]$

(c) En déduire que $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}$.

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}$$

d'après la question 1.(b)

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$$

d'après la relation de Chasles

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}$$

car M est le milieu de $[BC]$

(d) Conclure.

A l'aide des questions précédentes, on en déduit que :

$$2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}$$

d'après la question 1.(b)

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

d'après la question 1.(a)

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG})$$

$$= \overrightarrow{MN}$$

d'après la question 1.(c)

En conclusion, K est le milieu de $[MN]$.

2. Dans cette question, on souhaite montrer que les points B , C , K et H sont coplanaires.

(a) Justifier que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

$ABCDEFGH$ est un cube donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$.

On en déduit que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme et donc que ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, N est le milieu de $[BH]$ donc $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

(b) En utilisant le fait que K est le milieu de $[MN]$, montrer que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Comme K est le milieu de $[MN]$, $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}$ donc

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{BK}$$

De plus, M est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

(c) Conclure.

Grâce à la question précédente, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires et donc que les points B , C , H et K sont coplanaires.

3. Étudier la position relative des droites (AG) et (IJ) .

Montrons par l'absurde que les droites (AG) et (IJ) sont non coplanaires. En effet, si (AG) et (IJ) étaient coplanaires alors, comme $B \in (GJ)$, les points A , I , G et B seraient coplanaires, autrement dit B appartiendrait au plan $(AIB) = (ABC)$. C'est absurde par définition du cube donc (AG) et (IJ) sont non coplanaires.

4. Déterminer l'intersection du plan (BCE) et de la droite (IJ) . On détaillera sa réponse.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$, $BCHE$ est un parallélogramme donc N , qui est le milieu de $[BH]$, est aussi le milieu de $[CE]$ donc N appartient à (BCE) . De plus, M appartient à (BC) donc (BCE) et ainsi (MN) est incluse dans (BCE) . En particulier, K appartient à (BCE) K est un point commun à (IJ) et (BCE) .

On en déduit que soit (IJ) est incluse dans (BCE) soit (IJ) et (BCE) sont sécants en K .

Si (IJ) était incluse dans (BCE) , les points B , C , I et J seraient coplanaires et donc J appartiendrait au plan $(BCI) = (ABC)$, ce qui n'est pas le cas.

En conclusion, le plan (BCE) et la droite (IJ) sont sécants en K .