Correction Devoir Surveille N°6 (1h)

Exercice 1 (5 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 39 et 16 sont premiers entre eux.
Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 39 et 16 :

$$\begin{aligned} &39 = 16 \times 2 + 7 \\ &16 = 7 \times 2 + 2 \\ &7 = 2 \times 3 + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $PGCD(39; 16) = 1$ et donc que $\boxed{39 \text{ et } 16 \text{ sont premiers entre eux}}$.

2. En remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers u et v tels que $39u - 16v = 1$.
En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$$\begin{aligned} &1 = 7 - 2 \times 3 \\ &1 = 7 - 3(16 - 7 \times 2) \\ &1 = -3 \times 16 + 7 \times 7 \\ &1 = -3 \times 16 + 7(39 - 16 \times 2) \\ &1 = 39 \times 7 - 16 \times 17 \end{aligned}$$

Une solution particulière de cette équation est donc $\boxed{u = 7 \text{ et } v = 17}$.

3. Résoudre l'équation diophantienne $39x - 16y = 1$ d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.
Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E).

$$39x - 16y = 1 \iff 39x - 16y = 39 \times 7 - 16 \times 17 \iff 39(x - 7) = 16(y - 17)$$

Ainsi, 16 divise $39(x - 7)$.
D'après la question **1.**, 39 et 16 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 16 divise $x - 7$.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - 7 = 16k \iff x = 16k + 7$$

De plus, comme $39(x - 7) = 16(y - 17)$, on en déduit que $39(16k + 7 - 7) = 16(y - 17)$, soit $y = 39k + 17$.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $x = 16k + 7$ et $y = y = 39k + 17$. Alors,

$$\begin{aligned} 39x - 16y &= 39(16k + 7) - 16(39k + 17) \\ &= 39 \times 16k + 39 \times 7 - 16 \times 39k - 16 \times 17 \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $(x; y)$ est bien solution de (E).

En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\{(16k + 7; 39k + 17), \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}}$$

Exercice 2 (3,5 points)

Déterminer l'ensemble des couples $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$$

Analyse :

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution du système.
Comme $PGCD(a;b)=9$, il existe deux entiers premiers entre eux a' et b' tels que $a=9a'$ et $b=9b'$.
On en déduit alors que :

$$a+b=72 \iff 9a'+9b'=72 \iff a'+b'=8$$

Comme a' et b' sont premiers entre eux, les couples envisageables sont :

$$(1;7) \qquad (3;5) \qquad (5;3) \qquad (7,1)$$

On multiplie les valeurs par 9 et on obtient les couples candidats suivants :

$$(9;63) \qquad (27;45) \qquad (45;27) \qquad (63,9)$$

Synthèse :

Croyez-moi sur parole, les quatre couples candidats sont bien solutions du système.

Conclusion :

Les couples solutions de ce système sont :

$$\boxed{(9;63) \qquad (27;45) \qquad (45;27) \qquad (63,9)}$$

Exercice 3 (3,5 points)

Déterminer un entier a tel que $134a \equiv 1[57]$.
(Un raisonnement détaillé est attendu et pas uniquement un résultat parachuté !)
Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 134 et 57 :

$$\begin{aligned}
134 &= 57 \times 2 + 20 \\
57 &= 20 \times 2 + 17 \\
20 &= 17 \times 1 + 3 \\
17 &= 3 \times 5 + 2 \\
3 &= 2 \times 1 + 1
\end{aligned}$$

On en déduit que $PGCD(134;57)=1$ et donc que 134 et 57 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Bézout, l'équation $134u+57v=1$ admet bien des solutions.
On en détermine une par remontée de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1 &= 3-2 \\
1 &= 3-(17-3\times 5) \\
1 &= -17+6\times 3 \\
1 &= -17+6(20-17) \\
1 &= 6\times 20 - 7\times 17 \\
1 &= 6\times 20 - 7(57-20\times 2) \\
1 &= -7\times 57 + 20\times 20 \\
1 &= -7\times 57 + 20(134-57\times 2) \\
1 &= 20\times 134 - 47\times 57
\end{aligned}$$

Modulo 57, on obtient alors $\boxed{20 \times 134 \equiv 1[57]}$.
En conclusion, 20 est un inverse de 134 modulo 57.

Exercice 4 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_n = n(n^2+1)$, $b_n = 2n^3+2n+1$ et $c_n = n^3$.

1. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \times b_n - 2 \times a_n = 2n^3+2n+1-2n(n^2+1) = 2n^3+2n+1-2n^3-2n = 1$$

Ainsi, d'après le théorème de Bézout, $\boxed{a_n \text{ et } b_n \text{ sont premiers entre eux pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Déterminer le $PGCD$ de a_n et c_n.
Méthode 1 :
Si $n = 1$, alors $a_n = 1$ et $c_n = 2$ donc $PGCD(a_n; c_n) = 1$.
Pour $n \geqslant 2$, écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers $a_n = n^3+n$ et $c_n = n^3$:
$n^3+n = n^3 \times 1 + n$ avec $0 \leqslant n < n^3$ car $n \geqslant 2$.
$n^3 = n \times n^2 + 0$
Les dernier reste non nul est égal à n donc $\boxed{PGCD(a_n; c_n) = n}$.

Méthode 2 :
On a :

$$PGCD(a_n; c_n) = PGCD(n(n^2+1); n \times n^2) = n \times PGCD(n^2+1; n^2)$$

De plus, n^2 et n^2+1 sont deux entiers consécutifs donc ils sont premiers entre eux.
Ainsi, $PGCD(n^2+1; n^2) = 1$ et $\boxed{PGCD(a_n; c_n) = n}$.

Exercice 5 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Pour tous entiers relatifs distincts a, b et c, si a divise c et b divise c, alors ab divise c.
FAUX
Par exemple, 4 divise 12, 6 divise 12, mais $4 \times 6 = 24$ ne divise pas 12.

2. Pour tous entiers naturels a, b et c, si c divise a et b et si a et b sont premiers entre eux, alors $c = 1$.
VRAI
Soient a, b et c des entiers naturels tels que c divise a et b et tels que a et b sont premiers entre eux.
Alors, comme c divise a et b, c divise $PGCD(a; b) = 1$. De plus, $c \geqslant 0$ donc $c = 1$.

3. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{1}{n} PGCD(n, 10)$ est convergente.
VRAI
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant PGCD(n, 10) \leqslant 10 \iff \frac{0}{n} \leqslant \frac{1}{n} PGCD(n, 10) \leqslant \frac{10}{n} \iff 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{10}{n}$$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{10}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Par conséquent, la suite (u_n) est convergente.