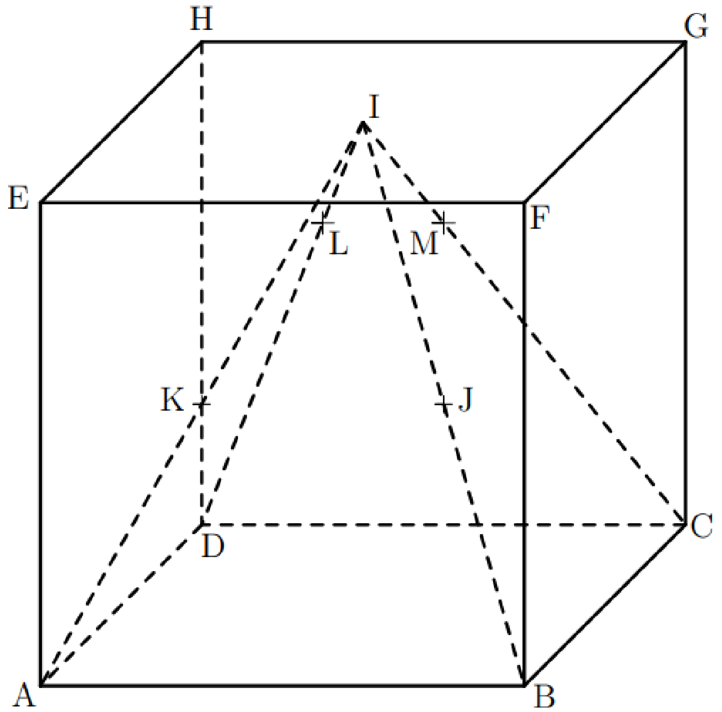
Correction Devoir Surveille N°6 (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (9 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Le point I est le centre de la face $EFGH$, J et K sont les milieux respectifs de $[BI]$ et $[AI]$ et L et M sont les points définis par $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$.
Vous pouvez ignorer les points M et K qui ne serviront pas dans l'exercice.



1. Pour chaque question, cocher la ou les affirmations qui sont vraies. Aucune justification n'est demandée.

(a) Les droites (EH) et (BC) sont :
☐ sécantes √ **parallèles** √ **coplanaires** ☐ non coplanaires

(b) Les droites (AC) et (FH) sont :
☐ sécantes ☐ parallèles ☐ coplanaires √ **non coplanaires**

(c) Les droites (DH) et (AI) sont :
☐ sécantes ☐ parallèles ☐ coplanaires √ **non coplanaires**

(d) L'intersection des plans (ABI) et (DIC) est :
☐ vide ☐ le point I √ **une droite** ☐ un plan

(e) La droite (FH) est :
√ **sécante au plan** (EAC) ☐ strictement parallèle au plan (EAC) ☐ incluse dans le plan (EAC)

2. Le but de cette question est d'étudier l'alignement des points J, L et H.

(a) Montrer que $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$.
Comme I est le centre de la face $EFGH$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}\right) && \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}\right) && \text{car } EFGH \text{ est un carré} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$ puis que $\overrightarrow{JH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} && \text{d'après la question précédente}\\
&= \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} && \text{car } ABCDEFGH \text{ est un cube}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BF} && \text{car } I \text{ est le milieu de } [BI]\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}\right) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} && \text{d'après la question précédente}\\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}
\end{aligned}$$

(c) En raisonnant comme précédemment, on peut montrer que $\overrightarrow{DI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.
On admet ce résultat.
En déduire que $\overrightarrow{LH} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{LH} &= \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DH} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{BF} && \text{car } \overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ID}\\
&= -\frac{3}{4}\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BF}\\
&= -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}\right) + \overrightarrow{BF} && \text{d'après le résultat admis}\\
&= \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF}\\
&= \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}
\end{aligned}$$

(d) Les points J, L et H sont-ils alignés ?
On remarque que $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{LH}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{LH}$ sont colinéaires.
Par conséquent, $\boxed{\text{les points } J, L \text{ et } H \text{ sont alignés}}$.

Exercice 2 (8 points)

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(-2;8;9)$, $B(-4;4;5)$, $C(0;4;-3)$, $D(-8;6;7)$ et $E(1;-2;3)$. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-(-2)\\4-8\\5-9\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(-2)\\4-8\\-3-9\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-12\end{pmatrix}$$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. En conclusion, $\boxed{\text{les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$.

2. Calculer les coordonnées des points I et J.

I est le milieu de $[AB]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$$
$$y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$
$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{9+5}{2} = 7$$

J est le milieu de $[DC]$ donc :

$$x_J = \frac{x_D+x_C}{2} = \frac{-8+0}{2} = -4$$
$$y_J = \frac{y_D+y_C}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$
$$z_J = \frac{z_D+z_C}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$$

En conclusion, on a $\boxed{I(-3;6;7)}$ et $\boxed{J(-4;5;2)}$.

3. Calculer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Soit $L(x_L;y_L;z_L)$ le point recherché.

$$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x_L - x_B = \frac{1}{4}(x_C - x_B)\\ y_L - y_B = \frac{1}{4}(y_C - y_B)\\ z_L - z_B = \frac{1}{4}(z_C - z_B)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L - (-4) = \frac{1}{4}(0-(-4))\\ y_L - 4 = \frac{1}{4}(4-4)\\ z_L - 5 = \frac{1}{4}(-3-5)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L + 4 = 1\\ y_L - 4 = 0\\ z_L - 5 = -2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L = -3\\ y_L = 4\\ z_L = 3\end{cases}$$

En conclusion, le point L a pour coordonnées $\boxed{L(-3;4;3)}$.

4. Montrer que les points I, J, L et E sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}4\\-8\\-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
On cherche à déterminer un couple de réels $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{IE} = x\overrightarrow{IJ} + y\overrightarrow{IL}$.

$$\begin{cases} 4 = -x \\ -8 = -x - 2y \\ -4 = -5x - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 \\ -8 = -(-4) - 2y \\ -4 = -5 \times (-4) - 4y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -4 \\ -12 = -2y \\ -24 = -4y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que $\overrightarrow{IE} = -4\overrightarrow{IJ} + 6\overrightarrow{IL}$.
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.
En conclusion, $\boxed{\text{les points } I,\ J,\ E \text{ et } L \text{ sont coplanaires}}$.

Exercice 3 (3 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[EH]$, $[BC]$ et $[CG]$.

1. La droite (JK) coupe le plan (EFH) en un point L. Construire ce point.
2. Construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) en laissant apparents les traits de construction.