

DEVOIR SURVEILLE N°6 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (9 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
- (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. (a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α dont on déterminera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
- (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. (a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

- (b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .

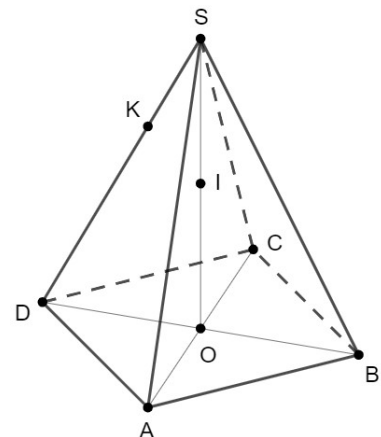
Exercice 2 (3 points)

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ de centre O .

On note I le milieu de $[SO]$ et K le point tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

On se place dans le repère $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{OK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$.
2. Déterminer les coordonnées des points B , I et K .
3. Démontrer que les points B , I et K sont alignés.

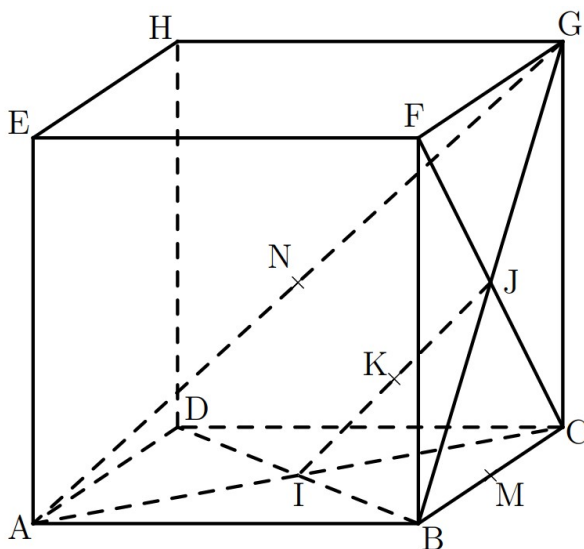


Exercice 3 (2 points)

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

Exercice 4 (6 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I le centre de la face $ABCD$, J le centre de la face $BCGF$, K le milieu de $[IJ]$, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AG]$.



1. Dans cette question, on souhaite montrer que K est le milieu de $[MN]$.
 - (a) Démontrer que $\vec{MI} = \frac{1}{2}\vec{BA}$.
On admet que, de même, $\vec{MJ} = \frac{1}{2}\vec{CG}$
 - (b) Montrer que $\vec{MI} + \vec{MJ} = 2\vec{MK}$.
 - (c) On admet que, de même, $\vec{MA} + \vec{MG} = 2\vec{MN}$. En déduire que $2\vec{MN} = \vec{BA} + \vec{CG}$.
 - (d) Conclure.
2. Dans cette question, on souhaite montrer que les points B , C , K et H sont coplanaires.
 - (a) Justifier que $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BH}$.
 - (b) En utilisant le fait que K est le milieu de $[MN]$, montrer que $\vec{BK} = \frac{1}{4}\vec{BH} + \frac{1}{4}\vec{BC}$.
 - (c) Conclure.
3. Étudier la position relative des droites (AG) et (IJ) .
4. Déterminer l'intersection du plan (BCE) et de la droite (IJ) . On détaillera sa réponse.