

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°5 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (12 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - xe^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^x(1 - x) + 1$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - x) = -\infty$.

Finalement, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. (a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

Par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$ donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

- (b) Que peut-on en déduire concernant la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g ?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

3. (a) Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = -xe^x$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - 1 \times e^x - x \times e^x + 0 \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

- (b) Dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ dont $g'(x)$ est du même signe que $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	2	$-\infty$

$$g(0) = e^0 - 0 \times e^0 + 1 = 2$$

4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]-\infty; 0]$, $g(x) > 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

De plus,

- La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- $g(0) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty; 2]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ et donc aussi sur $\mathbb{R}$.

(b) En détaillant votre démarche, déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

On utilise la méthode par balayage.

$g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6$ donc $1 < \alpha < 2$.

$g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$ donc $1,2 < \alpha < 1,3$.

$g(1,27) \approx 0,03$ et $g(1,28) \approx -0,007$ donc $1,27 < \alpha < 1,28$.

5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

A l'aide des questions précédentes, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		2	0	$-\infty$
$g(x)$		+	0	-

Partie B

Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer la limite de A en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$ donc, par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} A(x) = -\infty$.

2. (a) Déterminer la limite de A en $+\infty$.

On a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \times \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc, par somme et quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} = 4$.

Finalement, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0$.

(b) Que peut-on en déduire concernant la courbe $\mathcal{C}_A$ représentative de la fonction A ?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_A$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. Montrer que pour tout réel x ,

$$A'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$A(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u(x) = 4x \\ v(x) = e^x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} u'(x) = 4 \\ v'(x) = e^x \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{4 \times (e^x + 1) - 4x \times e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction A sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $A'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

On en déduit le signe de la fonction A' puis les variations de la fonction A :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$	$-\infty$	$A(\alpha)$	0

Partie C

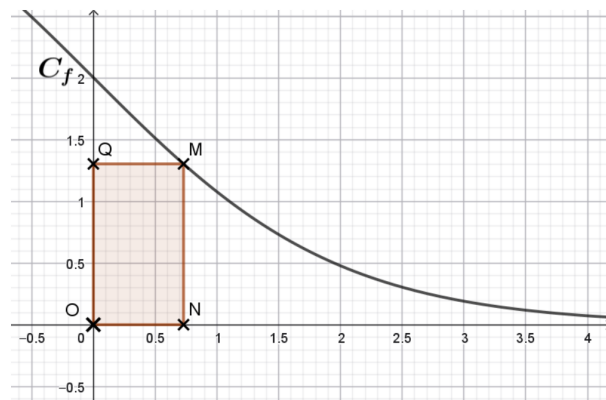
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère d'origine O .

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$,
- N le point de coordonnées $(x; 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.



1. (a) Démontrer que l'aire du rectangle $ONMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α .

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ONMQ} &= ON \times OQ \\
 &= x \times f(x) \\
 &= \frac{4x}{e^x + 1} \\
 &= A(x)
 \end{aligned}$$

D'après la **partie B**, la fonction A admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en $x = \alpha$ donc l'aire du rectangle $ONMQ$ est elle aussi maximale lorsque le point M a pour abscisse $x = \alpha$.

(b) Démontrer que l'ordonnée de M est alors $\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}$.

M a pour abscisse α donc son ordonnée est égale à $f(\alpha) = \frac{4}{e^\alpha + 1}$.

De plus, d'après la **Partie A**, on a $g(\alpha) = 0$ donc :

$$\begin{aligned}g(\alpha) = 0 &\iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \\&\iff e^\alpha(1 - \alpha) + 1 = 0 \\&\iff e^\alpha = -\frac{1}{1 - \alpha} \\&\iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}\end{aligned}$$

On a donc :

$$f(\alpha) = \frac{4}{e^\alpha + 1} = \frac{4}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{4}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}$$

En conclusion, les coordonnées du point M sont $M\left(\alpha; \frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}\right)$.

2. (Bonus) Le point M a pour abscisse α . Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M est parallèle à la droite (NQ) .

On a $M(\alpha; f(\alpha))$, $N(\alpha; 0)$ et $Q(0; f(\alpha))$.

Deux droites (non verticales) sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

▪ Le coefficient directeur de la droite (NQ) est :

$$m = \frac{y_Q - y_N}{x_Q - x_N} = \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$

▪ La tangente $\mathcal{C}_f$ au point M a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

donc

$$f'(\alpha) = -\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2}$$

Rappelons maintenant que, d'après la question **1.(b)**, $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ donc :

$$e^\alpha + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{d'où} \quad (e^\alpha + 1)^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$$

On obtient alors :

$$f'(\alpha) = -\frac{4 \times \frac{1}{\alpha - 1}}{\frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}} = -\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$

Ainsi, les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux et ces droites sont donc parallèles.

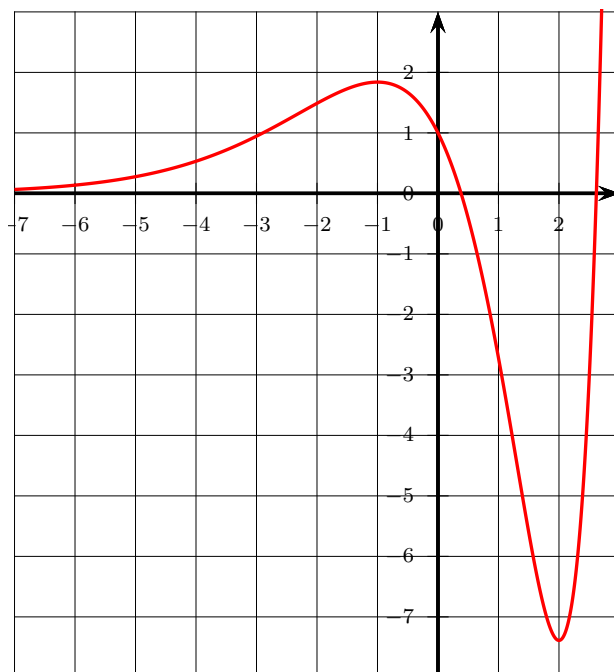
Exercice 2 (8 points)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Les résultats de cette partie seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f' . Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.

Le sens de variation de la fonction f est donnée par la signe de sa fonction dérivée f' .

Sur l'intervalle $] -\infty; 0, 4]$, f' est positive donc f est croissante.

Sur l'intervalle $[0, 4; 2, 6]$, f' est négative donc f est décroissante.

Sur l'intervalle $[2, 6; +\infty[$, f' est positive donc f est croissante.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

La convexité de la fonction f est donnée par les variations de sa fonction dérivée f' .

Sur les intervalles $] -\infty; -1]$ et $[2; +\infty[$, f' est croissante donc f est convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la **Partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 5x + 6 & u'(x) = 2x - 5 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 6)e^x \\ &= (2x - 5 + x^2 - 5x + 6)e^x \\ &= (x^2 - 3x + 1)e^x \end{aligned}$$

2. En déduire le sens de variation de la fonction f .

Pour déterminer le sens de variation de la fonction f , on étudie le signe de sa fonction dérivée f' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $x^2 - 3x + 1$.

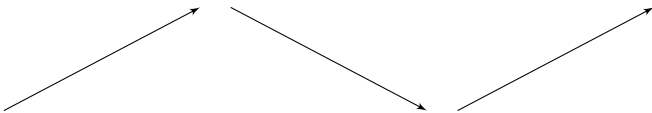
Commençons par résoudre l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

De plus, $a = 1 > 0$ donc la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x^2 - 3x + 1$	+	0	-	+
e^x	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente ($\mathcal{T}$) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$$f(0) = (0^2 - 5 \times 0 + 6)e^0 = 6$$

$$f'(0) = (0^2 - 3 \times 0 + 1)e^0 = 1$$

L'équation réduite de la tangente ($\mathcal{T}$) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc de la forme :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = x + 6$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .

On admet que, pour tout réel x , on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$.

4. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer la convexité de la fonction f , on étudie le signe de sa fonction dérivée seconde f'' .

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	+	0	+
e^x	+	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	+
Convexité de f	convexe	concave	convexe	

(b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = -1$ et en $x = 2$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion $A(-1; f(-1))$ et $B(2; f(2))$.

De plus, $f(-1) = ((-1)^2 - 5 \times (-1) + 6)e^{-1} = 12e^{-1}$ et $f(2) = (2^2 - 5 \times 2 + 6)e^2 = 0$.

En conclusion, les deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ont pour coordonnées $A(-1; 12e^{-1})$ et $B(2; 0)$.

(c) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1; 2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.

D'après la question précédente, la fonction f est concave sur $[-1; 2]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier en dessous de $(\mathcal{T})$ car $0 \in [-1; 2]$.

Par conséquent, pour tout $x \in [-1; 2]$, $f(x) \leq x + 6$.

