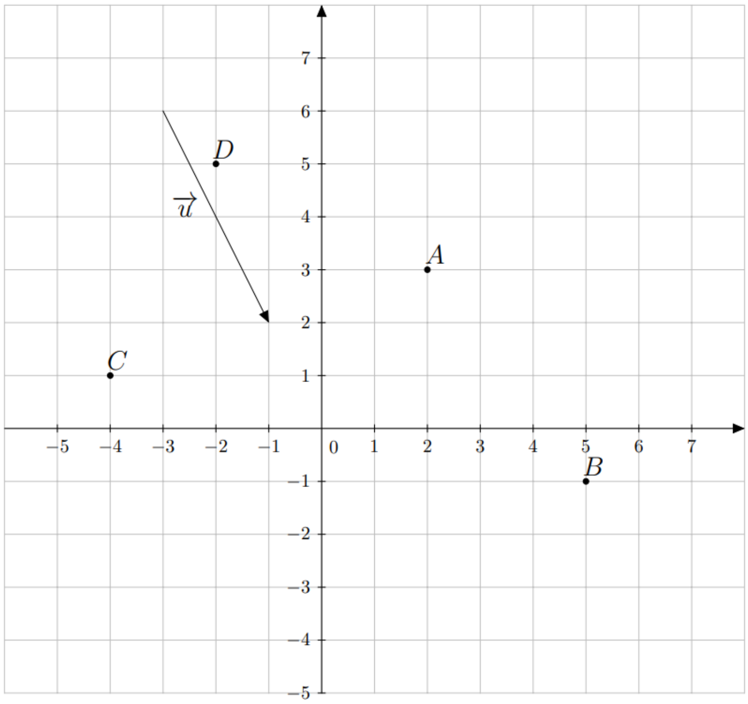
Correction Devoir Surveille N°5 (1h10)

Exercice 1 (6 points)

On considère le plan complexe suivant.



1. Lire les affixes z_A, z_B, z_C, z_D et $z_{\overrightarrow{u}}$ des points A, B, C, D et du vecteur $\overrightarrow{u}$ donnés sur la graphique ci-dessus.
   $z_A = 2 + 3i$ $\quad z_B = 5 - i$ $\quad z_C = -4 + i$ $\quad z_D = -2 + 5i$ $\quad z_{\overrightarrow{u}} = 2 - 4i$

2. Calculer l'affixe z_I du point I milieu du segment $[BC]$.
   $z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{5 - i - 4 + i}{2} = \dfrac{1}{2}$

3. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 5 - i - (2 + 3i) = 5 - i - 2 - 3i = 3 - 4i$

4. Le point B appartient-il au cercle de centre A et de rayon 5 ?
   $AB = |z_B - z_A| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.
   $AB = 5$ donc le point B appartient au cercle de centre A et de rayon 5.

5. Déterminer la nature du triangle ACD.
   $AC = |z_C - z_A| = |-4 + i - (2 + 3i)| = |-6 - 2i| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
   $AD = |z_D - z_A| = |-2 + 5i - (2 + 3i)| = |-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $CD = |z_D - z_C| = |-2 + 5i - (-4 + i)| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $AD = CD$ donc le triangle ACD est isocèle en D.

   De plus, on a d'une part $AC^2 = 40$ et d'autre part $AD^2 + CD^2 = 20 + 20 = 40$.
   $AC^2 = AD^2 + CD^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en D.
   En conclusion, $\boxed{\text{le triangle } ACD \text{ est isocèle rectangle en } D}$.

6. Représenter sur le graphique (après avoir justifié) l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$.
   $|z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$
   Par conséquent, l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 2 (8 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$ et on pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{z_1}{z_2} \\
&= \frac{1-i}{-8-8\sqrt{3}i} \\
&= \frac{(1-i)\times(-8+8\sqrt{3}i)}{(-8-8\sqrt{3}i)\times(-8+8\sqrt{3}i)} \\
&= \frac{-8+8\sqrt{3}i+8i-8\sqrt{3}i^2}{(-8)^2-(8\sqrt{3}i)^2} \\
&= \frac{-8+8\sqrt{3}+i(8+8\sqrt{3})}{64+192} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}}{32} + \frac{1+\sqrt{3}}{32}i
\end{aligned}$$

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

$|z_1| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 - i \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

$|z_2| = \left|-8-8\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$ donc :

$$\begin{aligned}
z_2 &= -8-8\sqrt{3}i \\
&= 16\left(-\frac{8}{16} - \frac{8\sqrt{3}}{16}i\right) \\
&= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

3. Déterminer la forme trigonométrique de Z.

On peut tout à fait passer par la forme exponentielle, ce qui revient à faire les mêmes calculs.
Tout d'abord,

$$|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\arg(Z) &= \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\ [2\pi]\\ &= \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]\\ &= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\ [2\pi]\\ &= \frac{-3\pi+8\pi}{12}\ [2\pi]\\ &= \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, la forme trigonométrique de Z est :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{16}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{32} &\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &\iff \boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{16}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{32} &\iff \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ &\iff \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &\iff \boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

- Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est un imaginaire pur.
FAUX
$|z| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc :

$$\begin{aligned}z &= 3 - i\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\arg(z^{3n}) &= 3n \times \arg(z)\ [2\pi] \\ &= 3n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\ [2\pi] \\ &= -\frac{n\pi}{2}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, si n est un entier pair, alors z^{3n} sera un nombre réel.
On peut par exemple vérifier que, pour $n = 2$, on a $z^{3\times 2} = z^6 = -1728$.

- Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 2 : Si le module de z est égal à 1, alors $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel.
VRAI
Soient a et b deux réels tels que $z = a + ib$. $|z| = 1$ donc $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ et donc $a^2 + b^2 = 1$.
On a alors :

$$\begin{aligned}z + \frac{1}{z} &= a + ib + \frac{1}{a + ib} \\ &= a + ib + \frac{1 \times (a - ib)}{(a + ib) \times (a - ib)} \\ &= a + ib + \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= a + ib + a - ib \\ &= 2a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Par conséquent, $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

- **Proposition 3 :** L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

FAUX
Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x solution de cette équation.
On a alors $x^5 + x + 1 \in \mathbb{R}$ mais, comme x est solution de cette équation, on a aussi $x^5 + x + 1 = i$, ce qui est absurde.
Par conséquent, cette équation n'admet pas de solution réelle.

Exercice 4 (2 points)

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \times z_2}$$

est un réel positif ou nul.
Les nombres complexes z_1 et z_2 sont de module 1, ils admettent donc pour forme exponentielle :

$$z_1 = e^{\alpha i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{\beta i}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \times z_2} &= \frac{(e^{\alpha i} + e^{\beta i})^2}{e^{\alpha i} \times e^{\beta i}} \\ &= \frac{\left(e^{\alpha i}\right)^2 + 2e^{\alpha i}e^{\beta i} + \left(e^{\beta i}\right)^2}{e^{\alpha i} \times e^{\beta i}} \\ &= \frac{\left(e^{\alpha i}\right)^2}{e^{\alpha i} \times e^{\beta i}} + \frac{2e^{\alpha i}e^{\beta i}}{e^{\alpha i} \times e^{\beta i}} + \frac{\left(e^{\beta i}\right)^2}{e^{\alpha i} \times e^{\beta i}} \\ &= e^{i(\alpha-\beta)} + 2 + e^{i(\beta-\alpha)} \\ &= 2 + 2\left(\frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}\right) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha - \beta) \\ &\geqslant 2 + 2 \times (-1) && \text{car la fonction cosinus est minorée par } -1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre complexe $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \times z_2}$ est bien un réel positif ou nul.