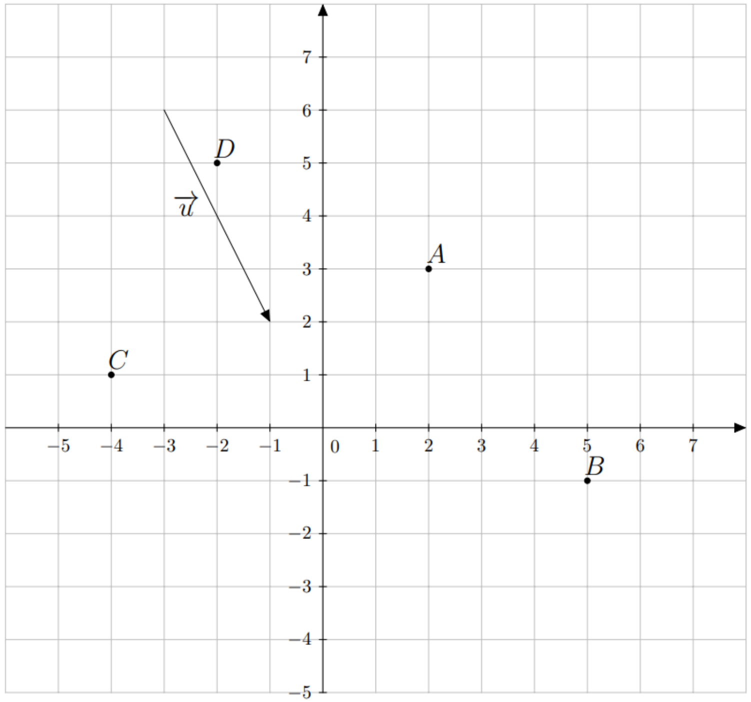
Devoir Surveille N°5 (1h10)

Exercice 1 (6 points)

On considère le plan complexe suivant.



1. Lire les affixes z_A, z_B, z_C, z_D et $z_{\overrightarrow{u}}$ des points A, B, C, D et du vecteur $\overrightarrow{u}$ donnés sur la graphique ci-dessus.
2. Calculer l'affixe z_I du point I milieu du segment $[BC]$.
3. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Le point B appartient-il au cercle de centre A et de rayon 5 ?
5. Déterminer la nature du triangle ACD.
6. Représenter sur le graphique (après avoir justifié) l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Exercice 2 (8 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$ et on pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. Déterminer la forme trigonométrique de Z.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 (6 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

- Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est un imaginaire pur.

- Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 2 : Si le module de z est égal à 1, alors $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel.

- **Proposition 3 :** L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 4 (2 points)

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \times z_2}$$

est un réel positif ou nul.

(Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.)