Correction Devoir Surveille N°5 (2h)

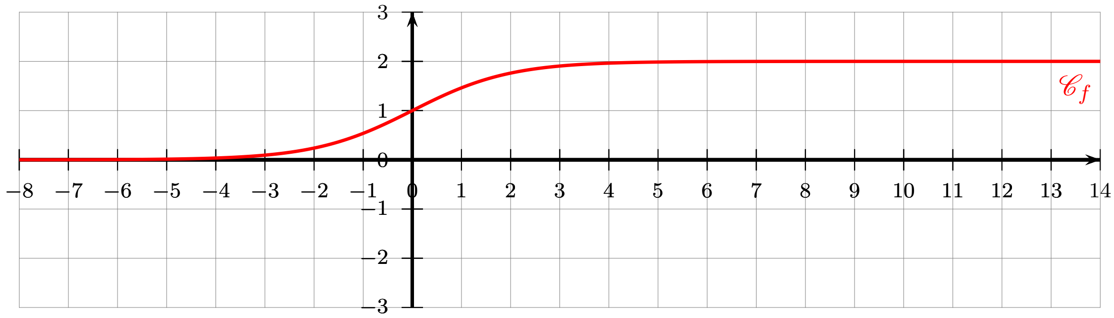
Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc, par somme et quotient de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
On a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » pour la limite en $+\infty$.
Néanmoins, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x \times 2}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}}$$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient et somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$.
Par quotient de limites, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2e^x \times (e^x + 1) - 2e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.
Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0; 1)$.
$f(0) = \frac{2 \times e^0}{e^0 + 1} = 1$ et $f'(0) = \frac{2 \times e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{1}{2}$
Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$ est donc :
$$y = f(0)(x - 0) + f(0)$$
$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$$

5. On veut étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T.

(a) Montrer que $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{g(x)}{2(e^x+1)}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2e^x-xe^x-x-2$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right) &= \frac{2e^x}{e^x+1}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\\
&= \frac{2}{2}\times\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{e^x+1}{e^x+1}\times\left(\frac{x+2}{2}\right)\\
&= \frac{4e^x-xe^x-2e^x-x-2}{2(e^x+1)}\\
&= \frac{2e^x-xe^x-x-2}{2(e^x+1)}
\end{aligned}
$$

(b) On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x)=e^x-xe^x-1$ et $g''(x)=-xe^x$.

i. Déterminer le signe de $g''(x)$ et en déduire les variations de la fonction g'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g'(0)=e^0-0\times e^0-1=0$.

ii. Déterminer le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.

D'après la question précédente, on en déduit que $g'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

iii. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$g(0)=2e^0-0\times e^0-0-2=0$.
La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x=0$.
Par conséquent, la fonction g est positive sur $]-\infty;0]$ et négative sur $[0;+\infty[$.

(c) Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T. Que peut-on dire du point A ?

D'après les questions précédentes $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\geqslant 0$ pour tout $x\in]-\infty;0]$.

Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T sur $]-\infty;0]$.

Inversement, $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\leqslant 0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T sur $[0;+\infty[$.
Finalement, la tangente T traverse la courbe au point A donc A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2 (2 points)

Soit k un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$
f(x)=\begin{cases} x^2+e^{x-2} & \text{si } x\leqslant 2\\ \dfrac{1}{x}+k & \text{si } x>2\end{cases}
$$

Déterminer la valeur de k pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 + e^{x-2}$ est continue sur $]-\infty; -2]$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} + k$ est continue sur $]2; +\infty[$.
Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est continue en 2.
Pour cela, il faut que $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2)$. On a :

$$f(2) = 2^2 + e^{2-2} = 5 \qquad \lim_{x \to 2-} f(x) = 2^2 + e^{2-2} = 5 \qquad \lim_{x \to 2+} f(x) = \frac{1}{2} + k$$

Par conséquent, la fonction f est continue en 4 et donc sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si :

$$5 = \frac{1}{2} + k \iff k = 5 - \frac{1}{2} \iff \boxed{k = \frac{9}{2}}$$

Exercice 3 (1 point)

Soit f une fonction continue définie sur $[0; 1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
On pourra s'intéresser à la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Posons, pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) = f(x) - x$.

- g est une fonction continue sur $[0; 1]$ car c'est la somme de fonctions continues sur $[0; 1]$.
- Comme $f(0) \geqslant 0$, alors $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$.
  Comme $f(1) \leqslant 1$, alors $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet bien au moins une solution dans } [0; 1]}$.

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dont le tableau de variation est donné ci dessous.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. **Proposition 1** : La droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f.
   FAUX
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5 \neq -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq -2$.
   Par conséquent, la droite d'équation $y = -2$ n'est pas une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f.

   Répondre que « ce n'est pas $y = -2$ l'asymptote mais plutôt $x = -2$ » est une remarque très pertinente mais ne répond pas à la question !

2. **Proposition 2** : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = -\infty$.
   VRAI
   D'après le tableau de variation, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2[$ donc, sur cet intervalle $f(x) < 5$, soit $f(x) - 5 < 0$. De plus, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$, on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5^-$.
   Finalement, par quotient et produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = -\infty$.

3. **Proposition 3** : Pour tout réel a, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution.
FAUX
Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x) < 5$ donc, par exemple, l'équation $f(x) = 10$ n'admet aucun solution sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

4. **Proposition 4** : L'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
FAUX
D'après le tableau de variation, la fonction f admet un maximum local en $x = 1$.
Comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a alors $f'(1) = 0$.

Exercice 5 (7 points)

Partie A :
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x + 1)(2x - 1)$$

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad 3(2x+1)(2x-1) = 0 \\ &\iff \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = 0 \\ &\iff \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Enfin, $a = 12 > 0$, donc la fonction f' est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	-9	↗	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
Sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}]$, le maximum de la fonction g est -7 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

- La fonction g est continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
- $g(\frac{1}{2}) = -9$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in [-9; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

$g(1) = -7$ et $g(2) = 18$ donc $1 < \alpha < 2$.
$g(1,4) \approx -1,2$ et $g(1,5) = 1$ donc $1,4 < \alpha < 1,5$.
$g(1,45) \approx -0,156$ et $g(1,46) \approx 0,07$ donc $\boxed{1,45 < \alpha < 1,46}$.

3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
A l'aide des questions précédentes, on en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser les asymptotes (s'il y a lieu).

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} (x^3+1) = \dfrac{9}{8}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} (4x^2-1) = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

   On en déduit que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. **(a)** Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.

   La fonction f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

   Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^3+1$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = 4x^2-1$, $v'(x) = 8x$

   On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{3x^2(4x^2-1) - (x^3+1)\times 8x}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{12x^4 - 3x^2 - 8x^4 - 8x}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{4x^4 - 3x^2 - 8x}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{x(4x^3 - 3x - 8)}{(4x^2-1)^2} \\
&= \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

   (b) Dresser le tableau de variations de f.

   Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $(4x^2-1)^2 > 0$ et $x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

x	$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

   Il est souvent plus facile de démontrer que $f(\alpha) - \dfrac{3}{8}\alpha = 0$ plutôt que d'essayer de prouver que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$.

On utilise le fait que $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha) - \frac{3}{8}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 1}{4\alpha^2 - 1} - \frac{3}{8}\alpha \\
&= \frac{8(\alpha^3 - 1) - 3\alpha(4\alpha^2 - 1)}{8(4\alpha^2 - 1)} \\
&= \frac{8\alpha^3 + 8 - 12\alpha^3 + 3\alpha}{8(4\alpha^2 - 1)} \\
&= \frac{-(4\alpha^3 - 3\alpha - 8)}{8(4\alpha^2 - 1)} \\
&= \frac{-g(\alpha)}{8(4\alpha^2 - 1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a prouvé que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$ et que $1,45 < \alpha < 1,46$ donc :

$$\frac{3}{8} \times 1,45 < \frac{3}{8} \times \alpha < \frac{3}{8} \times 1,46 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0,54375 < f(\alpha) < 0,5475$$

Finalement, on a donc $\boxed{0,54 < f(\alpha) < 0,55}$.

Partie C :

On souhaite déterminer un encadrement de α par balayage.

Parmi les 3 algorithmes suivants, un seul fonctionne. Préciser lequel et pourquoi.

```
#Programme 1
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
print(a,"alpha",a+h)
```

```
#Programme 2
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)<0:
    a=a+h
print(a,"alpha",a+h)
```

```
#Programme 3
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
    print(a,"alpha",a+h)
```

L'objectif est de calculer $g(a)$ et $g(a+h)$ et de chercher à partir de quand ils sont de signe différent. Cela voudra alors dire que l'un est positif et l'autre est négatif et donc que la fonction g s'annule quelque part entre a et $a+h$.

On va donc effectuer une boucle while g(a)*g(a+h)>0 qui va tourner tant que les deux valeurs sont du même signe et qui s'arrêtera donc dès que g(a) et g(a+h) sont de signe différent. Il ne restera alors plus qu'à afficher les valeurs trouvées à l'aide de l'instruction print en dehors de la boucle. $\boxed{\text{C'est donc l'algorithme 1 qui convient.}}$