Devoir Surveillé N°5 (2h)

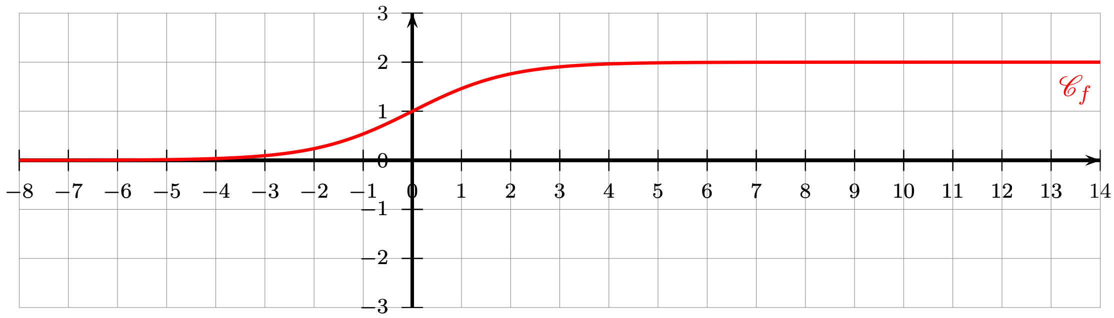
Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0; 1)$.
5. On veut étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T.

   (a) Montrer que $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{g(x)}{2(e^x + 1)}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - xe^x - x - 2$.

   (b) On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = -xe^x$.

   i. Déterminer le signe de $g''(x)$ et en déduire les variations de la fonction g'.

   ii. Déterminer le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.

   iii. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T.
   Que peut-on dire du point A ?

Exercice 2 (2 points)

Soit k un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + e^{x-2} & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x} + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de k pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (1 point)

Soit f une fonction continue définie sur $[0; 1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
On pourra s'intéresser à la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dont le tableau de variation est donné ci dessous.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. **Proposition 1** : La droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f.

2. **Proposition 2** : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = -\infty$.

3. **Proposition 3** : Pour tout réel a, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution.

4. **Proposition 4** : L'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Exercice 5 (7 points)

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser les asymptotes (s'il y a lieu).

2. **(a)** Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f.

3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

Partie C :

On souhaite déterminer un encadrement de α par balayage.
Parmi les 3 algorithmes suivants, un seul fonctionne. Préciser lequel et pourquoi.

```python
#Programme 1
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
print(a,"alpha",a+h)
```

```python
#Programme 2
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)<0:
    a=a+h
print(a,"alpha",a+h)
```

```python
#Programme 3
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
    print(a,"alpha",a+h)
```