

DEVOIR SURVEILLE N°5 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (12 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - xe^x + 1.$$

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Déterminer la limite de g en $-\infty$.
 - Que peut-on en déduire concernant la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g ?
- Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = -xe^x$.
 - Dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
 - En détaillant votre démarche, déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}.$$

- Déterminer la limite de A en $-\infty$.
- Déterminer la limite de A en $+\infty$.
 - Que peut-on en déduire concernant la courbe $\mathcal{C}_A$ représentative de la fonction A ?
- Montrer que pour tout réel x ,

$$A'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

- Dresser le tableau de variation complet de la fonction A sur $\mathbb{R}$.

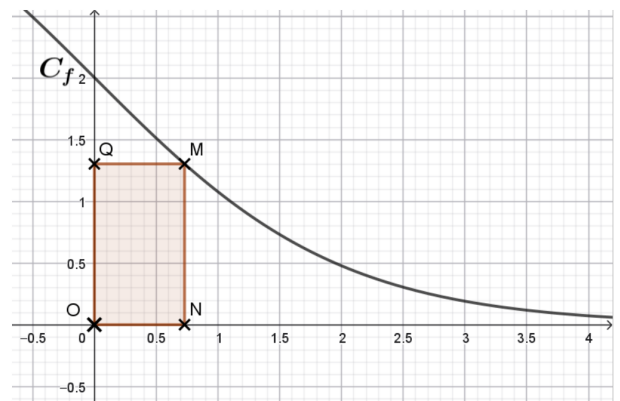
Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère d'origine O .
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$,
- N le point de coordonnées $(x; 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.



- Démontrer que l'aire du rectangle $ONMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α .
 - Démontrer que l'ordonnée de M est alors $\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}$.
- (Bonus)** Le point M a pour abscisse α . Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M est parallèle à la droite (NQ) .

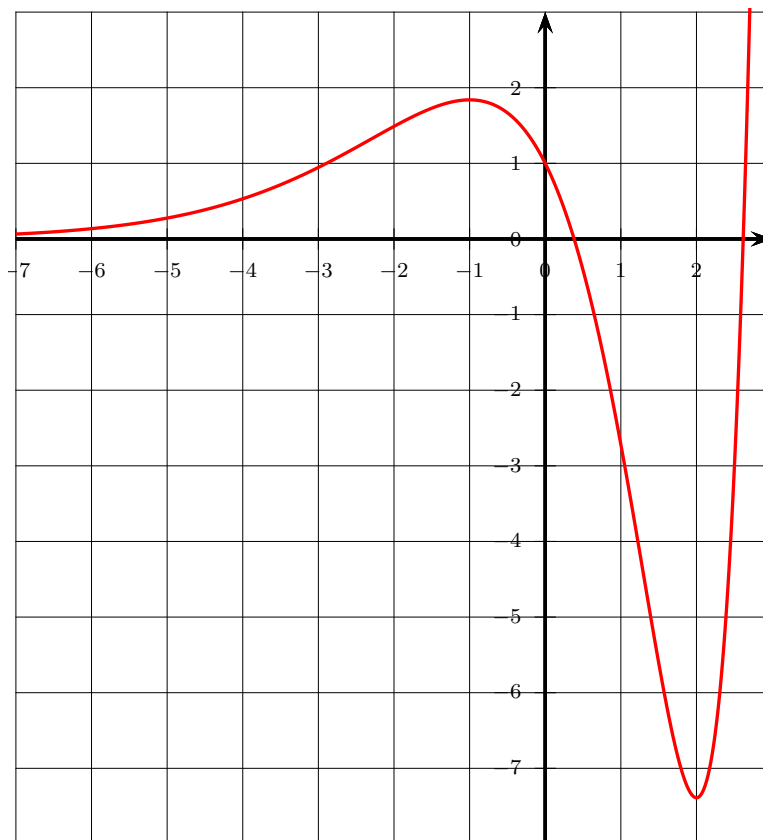
Exercice 2 (8 points)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Les résultats de cette partie seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f' . Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la **Partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f .
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .

On admet que, pour tout réel x , on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$.

4.
 - (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
 - (c) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1; 2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.