Correction Devoir Surveille N°4 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (10 points)

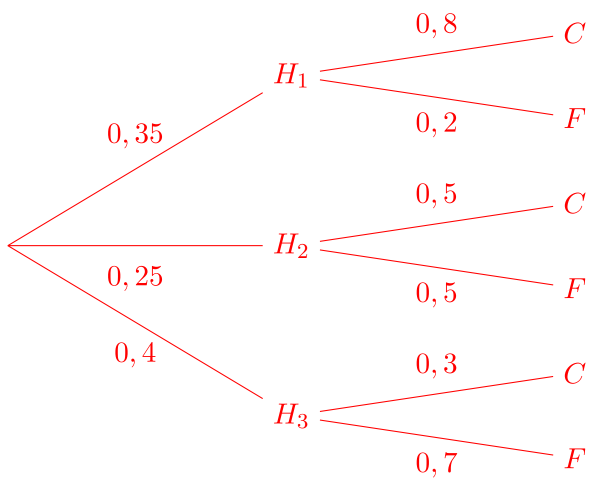
Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :

- 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
- Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
- La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »
- C : « l'arbre choisi est un conifère »
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu »

(a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.



(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
$P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.
la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est égale à $0,12$.

(c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0,525$.
Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) \\ &= P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) \\ &= 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 \\ &= 0,525 \end{aligned}$$

(d) L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} près.
On cherche à calculer $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$$

la probabilité que l'arbre ait été acheté chez l'horticulteur H_1 sachant que c'est un conifère est environ égale à $0,533$.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

  (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
  Chaque arbre choisi est une épreuve de Bernoulli de succès S : « L'arbre choisi est un conifère » de probabilité $p = 0,525$. On suppose que le stock est suffisamment important pour que ces choix puissent être assimilés à des tirages avec remise donc les choix sont identiques et indépendants. X comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

  (b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation dans le cadre de l'exercice.
  X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,525$ donc :

$$E(X) = np = 10 \times 0,525 = 5,25$$

  Si l'on prélève un très grand nombre d'échantillons de 10 arbres, il y aura en moyenne $5,25$ conifères par échantillon.

  (c) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
  On arrondira à 10^{-3} près.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^{10-5} \approx 0,243$$

  La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est environ égale à $0,243$.

  (d) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
  On arrondira à 10^{-3} près.
  A l'aide de la calculatrice, on trouve que :

$$P(X \leqslant 8) \approx 0,984$$

  Ainsi, la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est environ égale à $0,984$.

3. Dans cette question, on choisi au hasard un échantillon de n arbres dans cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de n arbres dans le stock.
On appelle Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

  (a) On note A_n l'événement « au moins un des n arbres choisis est un conifère ».
  Démontrer que la probabilité de l'événement A_n est égale à $1 - 0,475^n$.
  Dans cette question, Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,525$.

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(Y_n \geqslant 1) \\ &= 1 - P(Y_n = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,525^0 \times (1 - 0,525)^{n-0} \\ &= 1 - 0,475^n \end{aligned}$$

  (b) Déterminer avec la calculatrice la taille minimale n de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$.
  On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $1 - 0,475^n \geqslant 0,9999$.
  La suite de terme général $u_n = 1 - 0,475^n$ est strictement croissante. Par ailleurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,475^{12} \approx 0,99987 < 0,9999 \\ 1 - 0,475^{13} \approx 0,99994 > 0,9999 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \quad n = 13$$

  Par conséquent, la taille minimale n de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$ est de $n = 13$.

  (c) Déterminer la taille n minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères.
  L'espérance de la variable aléatoire Y_n est égale à :

$$E(Y_n) = np = 0,525n$$

Pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soit des conifères, il faut que :

$$E(Y_n) \geqslant 100 \iff 0,525n \geqslant 100 \iff n \geqslant \frac{100}{0,525} \approx 190,5$$

Le nombre minimal d'arbres de l'échantillon pour qu'en moyenne au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères est donc de 191.

(d) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,475^n, = 0$ car $-1 < 0,475 < 1$.
Par somme de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$.
Ainsi, plus l'échantillon est grand, plus la probabilité de l'événement A_n tend vers 1. Autrement dit, plus l'échantillon est de taille importante, plus on est certain d'avoir au moins un conifère dans l'échantillon.

Exercice 2 (2 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \text{« Pour tout } x \neq 1,\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ »}$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 1$, la fonction f est dérivable sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que, pour tout $x \neq 1$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout $x \neq 1$:

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

Par hypothèse de récurrence, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. On a, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}\right)'(x) \\
&= \frac{-k! \times (k+1) \times (-1) \times (1-x)^k}{\left((1-x)^{k+1}\right)^2} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(k+1)! \times (1-x)^k}{(1-x)^{2k+2}} \\
&= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } x \neq 1,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$.

Exercice 3 (8 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un pingouin est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un pingouin choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un pingouin choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

- T_n : « le pingouin utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le pingouin utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = P(T_n)$$

où $P(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $P(T_1)$, $P(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $P_{T_1}(T_2)$, $P_{P_1}(T_2)$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis donc

$$P(T_1) = 0,5 \quad \text{et} \quad P(P_1) = 0,5$$

D'après l'énoncé, la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à

$$p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$$

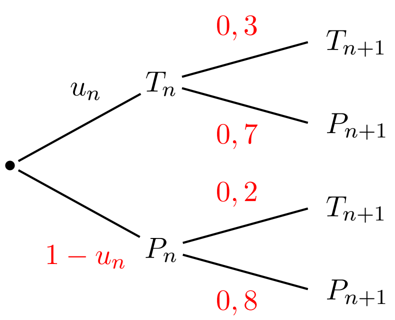
D'après l'énoncé, la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris l'avoir pris juste avant est égale à

$$p_{T_1}(T_2) = 0,3$$

(b) Démontrer que $P(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
$\{T_1, P_1\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T_2) &= P(T_1 \cap T_2) + P(P_1 \cap T_2) \\ &= P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(P_1) \times P_{P_1}(T_2) \\ &= 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,25 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



(d) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
$\{T_n, P_n\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(P_n \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 \\ &= 0,1u_n + 0,2 \end{aligned}$$

(e) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{2}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \frac{2}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 1$, on a $u_1 = P(T_1) = \frac{1}{2}$ et $u_2 = P(T_2) = \frac{1}{4}$.
Ainsi, on a bien $\frac{2}{9} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que $\frac{2}{9} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\frac{2}{9} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{9} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
\Longrightarrow \quad & 0,1 \times \frac{2}{9} \leqslant 0,1 \times u_{k+1} \leqslant 0,1 \times u_k \leqslant 0,1 \times \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \quad & 0,1 \times \frac{2}{9} + 0,2 \leqslant 0,1u_{k+1} + 0,2 \leqslant 0,1u_k + 0,2 \leqslant 0,1 \times \frac{1}{2} + 0,2 \\
\Longrightarrow \quad & \frac{2}{9} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}}$.

(f) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{2}{9}$.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} \\
&= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} \\
&= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) \\
&= \frac{1}{10}v_n
\end{aligned}$$

De plus, $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

Par conséquent, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{10} \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{5}{18}}$.

(b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
Ainsi, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$
$$v_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

De plus, comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on en déduit finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{u_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}}$$

(c) Calculer la limite de la suite (u_n).
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{10} < 1$.

Ainsi, par somme et produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}}$.

Bonus

Répondre à la question **3.(b)** de l'**Exercice 1** en résolvant une inéquation à l'aide de la fonction logarithme népérien. On pourra utiliser les propriétés suivantes si besoin :

- La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $]0; +\infty[$ et est strictement croissante sur cet intervalle.
- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

On résout dans $\mathbb{N}^*$ l'inéquation $P(A_n) \geqslant 0,9999$.

$$\begin{aligned}
1 - 0,475^n \geqslant 0,9999 &\iff -0,475^n \geqslant -0,0001 \\
&\iff 0,475^n \leqslant 0,0001 \\
&\iff \ln(0,475^n) \leqslant \ln(0,0001) && \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff n \times \ln(0,475) \leqslant \ln(0,0001) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,475)} && \text{car } \ln(0,475) < 0
\end{aligned}$$

De plus, $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,475)} \approx 12,37$ donc la taille minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$ est de $\boxed{n = 13}$.