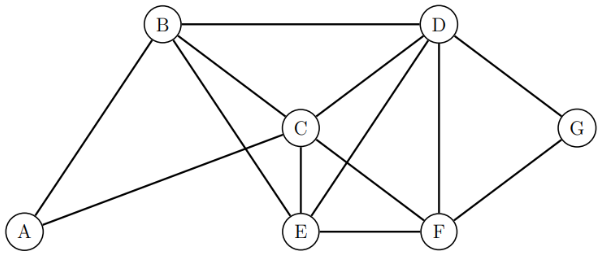
Correction Devoir Surveille N°4 (1h15)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (9 points)

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie de circulation à double sens entre deux lieux correspondants.



1. Déterminer les degrés des sommets du graphe Γ.
On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	5	5	4	4	2

2. (a) Le graphe Γ est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
Les sommets A et G ne sont pas adjacents donc le graphe Γ n'est pas complet.
La chaîne $A - B - C - D - E - F - G - H$ passe par tous les sommets du graphe donc ce graphe est connexe.

(b) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique.
La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis les lister.
On calcule la matrice M^3 à l'aide de la calculatrice. On obtient :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans la matrice M^3, la coefficient situé sur la première ligne et la sixième colonne est égal à 5.
Par conséquent, il existe 5 chemins de longueur 3 reliant les sommets A et F.
Ces cinq chemins sont :

$$A - B - C - F$$
$$A - B - D - F$$
$$A - B - E - F$$
$$A - C - D - F$$
$$A - C - E - F$$

(d) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 partant de A et qui ne sont pas des cycles ? Justifier.
La première ligne de la matrice M^3 est $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Il y a donc $7 + 8 + 5 + 5 + 5 + 3 = 33$ chemins de longueur 3 partant de A et qui ne sont pas des cycles.

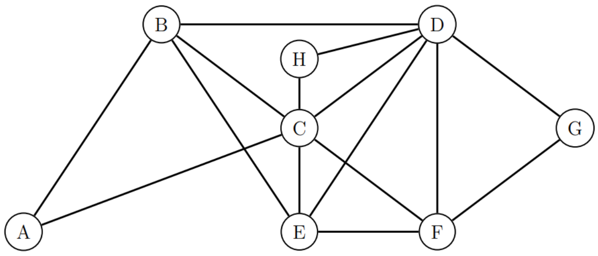
(e) Combien y a-t-il de cycles de longueur 3 partant de A ? Justifier.
Dans la matrice M^3, la coefficient situé sur la première ligne et la première colonne est égal à 3.
Par conséquent, il existe 2 cycles de longueur 3 partant de A qui sont :

$$A - B - C - A$$
$$A - C - B - A$$

3. La municipalité souhaite construire un centre de traitement des déchets de telle façon que les camions de collecte partent du centre et reviennent au centre après avoir emprunté chaque voie de circulation une fois et une seule afin de relever les poubelles publiques.

(a) Expliquer pourquoi une telle implantation n'est pas possible dans l'un des lieux identifiés par le graphe.
Cette question revient à étudier l'existence d'un cycle eulérien. Comme le graphe est connexe (question **2.(a)**), l'existence d'un tel cycle équivaut à la parité du degré de tous les sommets. Or, d'après la question **1.**, Γ possède deux sommets de degré impair donc, d'après le théorème d'Euler, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.
Ainsi, l'implantation n'est pas possible dans l'un des lieux indiqués sur le graphe.

(b) Proposer un lieu d'implantation ainsi que de nouvelles voies de circulation qui rendraient le projet possible.
On reproduira le graphe ci-dessus en ajoutant le sommet H correspondant au lieu d'implantation ainsi que les arêtes correspondant aux nouvelles voies de circulation.
On peut malgré tout obtenir un cycle eulérien en ajoutant un sommet H et une arête entre ce sommet et chacun des sommets de degré impair. On obtient alors le graphe ci-dessous :



Dans ce nouveau graphe, tous les sommets sont de degré pair donc il existe un cycle eulérien et le projet de la municipalité est ainsi possible.

(c) Donner un trajet dans le nouveau graphe qui réponde à la volonté de la municipalité.
Un trajet possible serait alors :

$$H - C - B - A - C - D - B - E - F - G - D - F - C - E - D - G$$

Exercice 2 (3 points)

Un triacontakaiheptagone est un polygone à 37 côtés.
Un triacontakaiheptagone et toutes ses diagonales forment un graphe.
Quel est le nombre d'arêtes de ce graphe ?

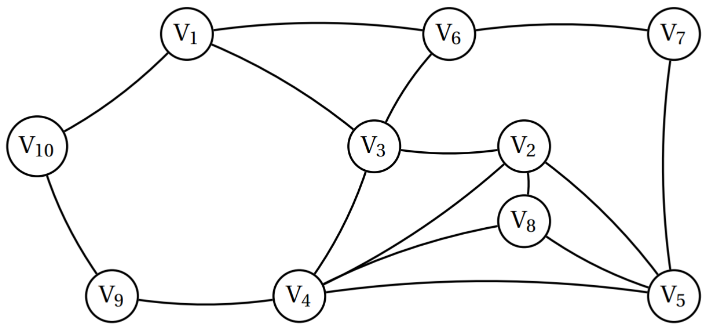
Le graphe ainsi obtenu est complet.
Chaque sommet est donc adjacent aux 36 autres sommets. Ainsi, chaque sommet est de degré 36.
Comme il y a 37 sommets, la somme des degrés s'élève à $36 \times 37 = 1332$.
Cependant, le nombre d'arêtes d'un graphe est égal à la moitié de la somme des degrés.
Par conséquent, ce graphe est constitué de $\frac{1332}{2} = 666$ arêtes.

Exercice 3 (6 points)

Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilitée entre deux variétés).

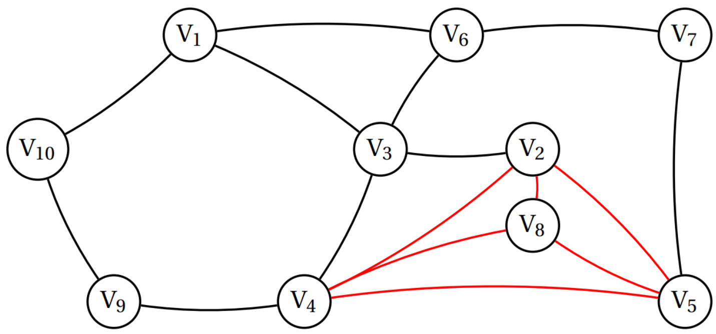
Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe G.



2. **(a)** Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.

Un sous-graphe complet d'ordre 4 est V_2, V_4, V_5, V_8.



(b) Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ?

Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?

Le graphe ayant un sous-graphe complet d'ordre 4, son nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.

Le jardinier doit donc décorer au moins 4 parterres.

3. **(a)** Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.

Sommet	V_4	V_2	V_3	V_5	V_1	V_6	V_8	V_7	V_9	V_{10}
Degré	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2

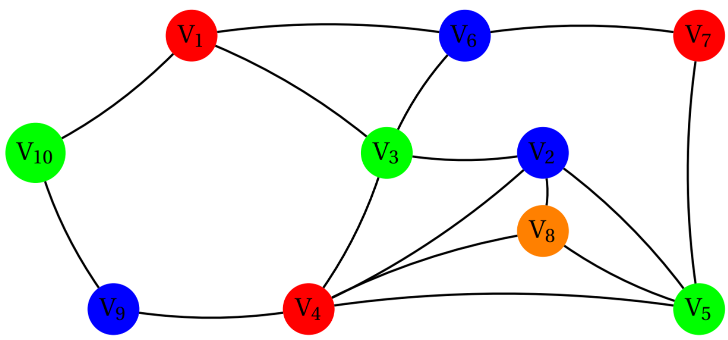
(b) En déduire un encadrement de C, nombre chromatique du graphe G.

Le sommet de plus haut degré est V_4 avec un degré égal à 5.

Par conséquent, le nombre chromatique de ce graphe est inférieur ou égal à 6.

En utilisant la question précédente, on obtient alors $4 \leqslant C \leqslant 6$.

4. **(a)** Procéder à la coloration du graphe G en appliquant l'algorithme de Welsh-Powell.



(b) Que peut-on en déduire pour le nombre C ?

Dans la question **2.(b)**, nous avons prouvé que $C \geqslant 4$.

Dans la question **4.(a)**, nous avons explicité une coloration avec uniquement 4 couleurs.

Par conséquent, $\boxed{C = 4}$.

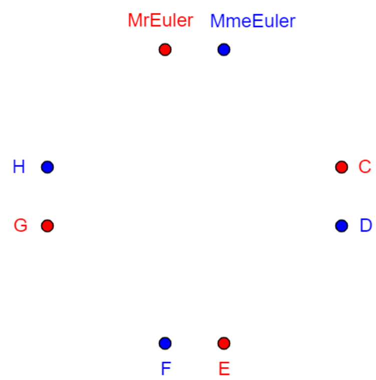
(c) Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

D'après la coloration précédente, on peut proposer au jardinier les quatre parterres suivants : $(V_1; V_4; V_7)$, $(V_2; V_6; V_9)$, $(V_3; V_5; V_{10})$ et (V_8).

Exercice 4 (2 points)

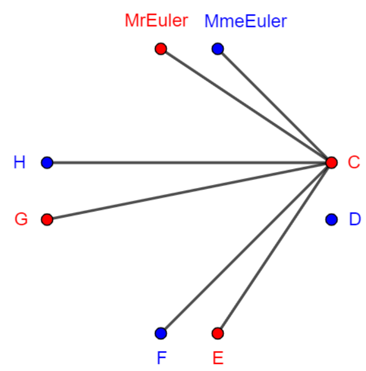
M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne se serre la main à lui même et les époux ne se serrent pas la main.
Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangées avec les autres membres de la réunion ?
Toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans la notation.

On va représenter cette situation au moyen d'un graphe d'ordre 8.
Ses sommets représentent les personnes présentes et une arête reliant deux personnes signifiera que les deux personnes concernées ont échangé une poignée de mains.

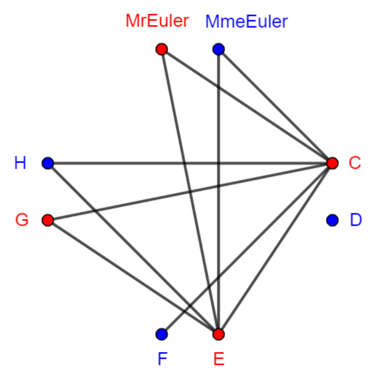


Comme personne ne se serre la main à lui-même et les époux ne se serrent pas la main, chaque personne présente ne peut pas échanger plus de 6 poignées de mains. Ainsi, le degré de chaque sommet du graphe est inférieur ou égal à 6.
De plus, M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombre tous distincts. Cela signifie que les 7 autres sommets ont des degrés tous distincts.
Enfin, comme tous les degrés sont inférieurs ou égaux à 6, ils doivent être égaux respectivement à 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

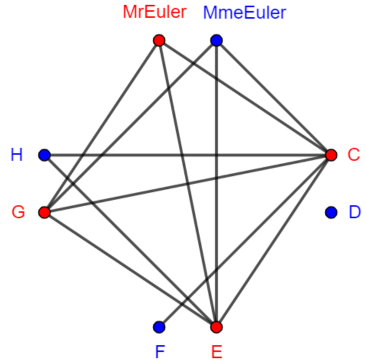
Il y a donc une personne qui a échangé 6 poignées de mains. Dès lors, la seule personne qui n'a échangé aucune poignée de mains ne peut être que son conjoint.



Ensuite, il y a une autre personne qui a échangé 5 poignées de mains. Dès lors, la seule personne qui a échange une seule poignée de mains ne peut être que son conjoint.



Enfin, il y a une autre personne qui a échangé 4 poignées de mains. On en déduit alors que la seule personne qui a échangé deux poignées de mains ne peut être que son conjoint.



On observe alors que Mme Euler a bien échangé un nombre de poignées de mains différents de 6, 0, 5, 1, 4 et 2.
En conclusion, M. Euler et Mme Euler ont tous deux échangé 3 poignées de mains.