Correction Devoir Surveille N°4 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (9 points)

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties. Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas. Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

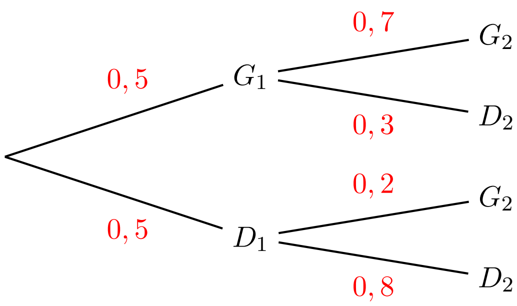
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
   Si Léa vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$.

2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée.

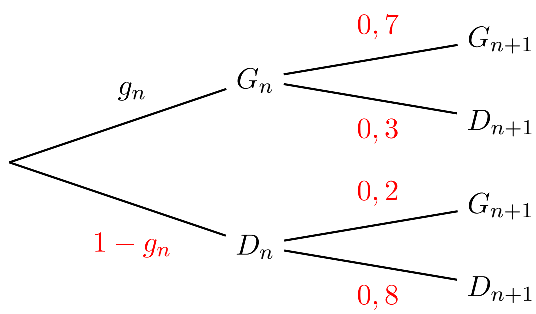


3. Calculer g_2.
   $\{G_1, D_1\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} g_2 &= P(G_2) \\ &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

$\{G_n, D_n\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= P(G_{n+1}) \\ &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 && \text{car } g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

De plus, $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$.
Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,5 \text{ et de premier terme } v_1 = 0,1}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

D'après ce qui précède, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_n &= g_1 \times q^{n-1} \\ v_n &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \end{aligned}$$

De plus, $g_n = v_n + 0,4$ donc $\boxed{g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4}$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1} \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

Or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0$.
En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (g_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$.
Par produit et somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 0,4}$.
Sur le long terme, le taux de victoire de Léa se rapprochera des 40%.

8. Déterminer avec la calculatrice le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.
On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001 \iff g_n \leqslant 0,401$.
La suite (g_n) est strictement décroissante. Par ailleurs :

$$\left\{\begin{array}{l} g_7 \approx 0,40156 > 0,401 \\ g_8 \approx 0,40078 < 0,401 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \quad n = 8$$

Par conséquent, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$ est $\boxed{n = 8}$.

Bonus :
On résout dans $\mathbb{N}^*$ l'inéquation $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.

$$\begin{aligned} g_n - 0,4 \leqslant 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leqslant 0,001 \\ &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leqslant 0,001 \\ &\iff 0,5^{n-1} \leqslant \frac{0,001}{0,1} \\ &\iff 0,5^{n-1} \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln(0,5^{n-1}) \leqslant \ln(0,01) && \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff (n-1) \times \ln(0,5) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n - 1 \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} && \text{car } \ln(0,5) < 0 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \approx 7,64$ donc le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$ est $\boxed{n = 8}$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while g > 0.4 + e :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = n + 1
7      return (n)
```

Exercice 2 (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_2 = 3$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$.

- Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$$

- Initialisation : Pour $n = 2$,
$\dfrac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \dfrac{6}{2} = 3 = u_2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Hérédité :
Soit $k \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que

$$u_k = \frac{2^k + 2}{2^k - 2}$$

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{k+1} = \frac{2^{k+1} + 2}{2^{k+1} - 2}$$

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{3u_k + 1}{u_k + 3} \\ &= \frac{3\left(\dfrac{2^k + 2}{2^k - 2}\right) + 1}{\dfrac{2^k + 2}{2^k - 2} + 3} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\dfrac{3(2^k + 2) + 2^k - 2}{2^k - 2}}{\dfrac{2^k + 2 + 3(2^k - 2)}{2^k - 2}} \\ &= \frac{3(2^k + 2) + 2^k - 2}{2^k + 2 + 3(2^k - 2)} \\ &= \frac{3 \times 2^k + 6 + 2^k - 2}{2^k + 2 + 3 \times 2^k - 6} \\ &= \frac{2^k \times 4 + 4}{2^k \times 4 - 4} \\ &= \frac{2(2 \times 2^k + 2)}{2(2 \times 2^k - 2)} \\ &= \frac{2^{k+1} + 2}{2^{k+1} - 2} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\boxed{u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}}$$

Exercice 3 (9 points)

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19. On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

PARTIE A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
Comme 5,7% des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du Lancet, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0,057$.

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Chaque personne testée est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La personne a déjà été infectée » de probabilité $p = 0,057$. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise donc les épreuves sont identiques et indépendantes. X comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   X suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,057$ donc :

   $$E(X) = np = 100 \times 0,057 = 5,7$$

   On en déduit que, sur un grand nombre d'échantillons de 100 personnes, il y en avait en moyenne 5,7 qui avaient déjà été infectés par la COVID 19 dans chaque échantillon.

   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

   $$P(X=0) = \binom{100}{0} \times 0,057^0 \times (1-0,057)^{100-0} = 0,943^{100} \approx 0,0028$$

   La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est environ égale à $0,0028$.

   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   A l'aide de la calculatrice, on trouve que :

   $$P(X \geqslant 2) \approx 0,9801$$

   La probabilité qu'il y ait au moins deux personnes infectées dans l'échantillon est environ égale à $0,9801$.

   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   A l'aide de la calculatrice, on trouve que $P(X \leqslant 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,9408$ donc $n = 9$.
   Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

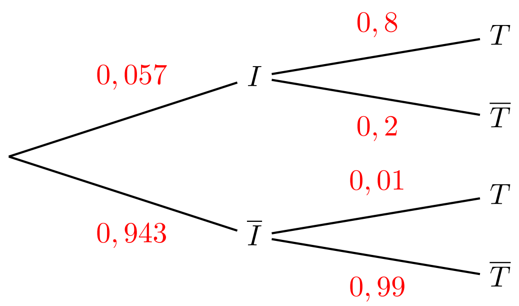
PARTIE B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :
   L'événement I est déjà utilisé dans la partie A et $P(I) = 0,057$.
   La définition de la sensibilité nous permet d'obtenir $P_I(T) = 0,8$.
   La définition de la spécificité nous permet d'obtenir $P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0,99$.



2. Montrer que $p(T) = 0,05503$.
   $\{I, \overline{I}\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(I \cap T) + P(\overline{I} \cap T) \\ &= P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T) \\ &= 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 \\ &= 0,05503 \end{aligned}$$

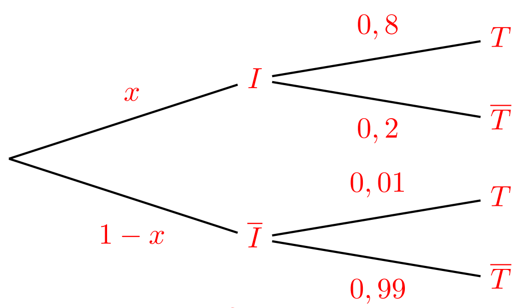
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   On cherche à calculer $P_T(I)$.

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,057 \times 0,8}{0,05503} \approx 0,8286$$

   La probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif est environ égale à $0,8286$.

PARTIE C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité $0,8$ et de spécificité $0,99$.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de $29,44\,\%$.
On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?
Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x.
On a donc l'arbre suivant :



$\{I, \overline{I}\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(I \cap T) + P(\overline{I} \cap T) \\ &= x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01 \\ &= 0,79x + 0,01 \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, $P(I) = 0,2944$ donc :

$$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844 \iff x = \frac{0,2844}{0,79} \iff x = 0,36$$

En conclusion, la probabilité que la personne choisie ait été infectée est égale à $0,36$.